Bài 1: Qui tắc đếm

I. Qui tắc cộng:

Nếu có m_1 cách chọn đối tượng a_1, m_2 cách chọn đối tượng a_2, …, m_n cách chọn đối tượng a_n, mà ở đó cách chọn đối tượng a_i không trùng với bất kì cách chọn đối tượng a_j nào ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, …, n$) thì sẽ có $m_1 + m_2 + … + m_n$ cách chọn một trong các đối tượng đã cho.

II. Qui tắc nhân:

Cho n đối tượng $a_1, a_2, …, a_n$. Nếu có m_1 cách chọn đối tượng a_1, và với mỗi cách chọn a_1 có m_2 cách chọn đối tượng a_2, và sau đó mỗi cách chọn a_1, a_2 có m_3 cách chọn đối tượng a_3, …, cuối cùng với mỗi cách chọn $a_1, a_2, …, a_{n-1}$ có m_n cách chọn đối tượng a_n. Thế thì sẽ có $m_1.m_2…m_n$ cách chọn dãy các đối tượng $a_1, a_2, …, a_n$.

Ví dụ 1: Anh Tuấn có 6 quyển sách khác nhau và 4 quyển vở khác nhau. Hỏi anh Tuấn có bao nhiêu cách chọn 1 trong các quyển đó?

ĐS: *Có 6 + 4 = 10 cách chọn*

Ví dụ 2: Cô Thuý có 3 bộ áo dài và 4 bộ áo đầm. Hỏi cô Thuý có bao nhiêu cách chọn 1 bộ trang phục để đi dự sinh nhật?

ĐS: *Có 4 + 3 = 7 cách chọn*

Ví dụ 3: Từ tỉnh A đến tỉnh B có 3 con đường đi, từ tỉnh B đến tỉnh C có 2 con đường đi. Muốn đi từ tỉnh A đến tỉnh C bắt buộc phải đi qua tỉnh B. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường đi từ tỉnh A đến tỉnh C?

ĐS: *Có 3.2 = 6 cách chọn.*

Ví dụ 4: Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập bao nhiêu số tự nhiên khác nhau có những chữ số khác nhau?

ĐS:
– Số gồm 1 chữ số: có 3 cách chọn
– Số gồm 2 chữ số: có 6 cách chọn
– Số gồm 3 chữ số: có 6 cách chọn

⇒ Có 3 + 6 + 6 = 15 (số)

Ví dụ 5: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Có 5 chữ số.

b) Có 5 chữ số khác nhau?

ĐS: *a) 5^5* *b) 5!*

Bài tập

Bài 1: Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường. Không có con đường nào nối thành phố B với thành phố C. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường đi từ thành phố A đến thành phố D?

ĐS: *có 12 đường.*

Bài 2: Có 25 đội bóng đá tham gia tranh cúp. Cứ 2 đội phải đấu với nhau 2 trận (đi và về). Hỏi có bao nhiêu trận đấu?

ĐS: *có 25.24 = 600 trận*

Bài 3: a) Một bó hoa gồm có: 5 bông hồng trắng, 6 bông hồng đỏ và 7 bông hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy 1 bông hoa?

b) Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số khác nhau có những chữ số khác nhau?

ĐS: a) 18 b) 15

Bài 4: Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu

cách chọn tiết mục biểu diễn, biết rằng chất lượng các vở kịch, điệu múa, các bài hát là như nhau?

ĐS: 36.

Bài 5: Một người có 7 cái áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cái cà vạt trong đó có hai cà vạt màu vàng. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn áo – cà vạt nếu:

a) Chọn áo nào cũng được và cà vạt nào cũng được?

b) Đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt màu vàng?

ĐS: a) 35 b) 29

Bài 6: Một trường phổ thông có 12 học sinh chuyên tin và 18 học sinh chuyên toán. Thành lập một đoàn gồm hai người sao cho có một học sinh chuyên toán và một học sinh chuyên tin. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đoàn như trên?

Bài 7: Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 người đàn ông và 2 người đàn bà ngồi trên một chiếc ghế dài sao cho 2 người cùng phái phải ngồi gần nhau.

Bài 8: Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đỏ và 8 viên bi đen xếp thành một dãy sao cho hai viên bi cùng màu không được ở gần nhau.

Bài 9: Hội đồng quản trị của một xí nghiệp gồm 11 người, trong đó có 7 nam và 4 nữ. Từ hộ đồng quản trị đó, người ta muốn lập ra một ban thường trực gồm 3 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ban thường trực sao cho trong đó phải có ít nhất một người nam.

ĐS: 161.

Bài 10: Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5}. Có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (*x; y*) biết rằng:

a) $x \in A, y \in A$ b) $\{x, y\} \subset A$ c) $x \in A, y \in A$ *và* $x + y = 6$.

ĐS: a) 25 b) 20 c) 5 cặp

Bài 11: Cho tập hợp A = {1, 2, 3, … , *n*} trong đó *n* là số nguyên dương lớn hơn 1. Có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (*x; y*), biết rằng: $x \in A, y \in A, x > y$.

ĐS: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Bài 12: Có bao nhiêu số palindrom gồm 5 chữ số (số palindrom là số mà nếu ta viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì giá trị của nó không thay đổi).

ĐS: Số cần tìm có dạng: $\overline{abcba} \Rightarrow$ *có 9.10.10 = 900 (số)*

Bài 13: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên thoả:

a) gồm 6 chữ số.

b) gồm 6 chữ số khác nhau.

c) gồm 6 chữ số khác nhau và chia hết cho 2.

ĐS: a) 6^6 *b) 6! c) 3.5! = 360*

Bài 14: a) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số?

b) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số?

c) Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đều là số chẵn?

d) Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

e) Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5?

ĐS: a) 3125 b) 168 c) 20 d) 900 e) 180000

Bài 15: Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số:

a) Gồm 2 chữ số? b) Gồm 2 chữ số khác nhau? c) Số lẻ gồm 2 chữ số?

d) Số chẵn gồm 2 chữ số khác nhau? e) Gồm 5 chữ số viết không lặp lại?

f) Gồm 5 chữ số viết không lặp lại chia hết cho 5?

ĐS: a) 25 b) 20 c) 15 d) 8 e) 120 f) 24

Bài 16: Từ 6 số: 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số:

a) Khác nhau?

b) Khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lớn hơn 300?

c) Khác nhau, trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5?

d) Khác nhau, trong đó có bao nhiêu số chẵn?
e) Khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ?
ĐS: a) 100 b) 60 c) 36 d) 52 e) 48

Bài 17: Từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau sao cho chữ số đầu tiên là 3?
b) Từ các chữ số 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau sao không tận cùng bằng 6?
c) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau trong đó phải có chữ số 2?
d) Từ các số: 0, 1,2 3, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau và một trong hai chữ số đầu tiên phải là 7?
e) Từ các số: 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau và không bắt đầu bởi 345?
f) Từ các số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau?
g) Từ các số: 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau, trong đó hai chữ số 3 và 5 không đứng cạnh nhau?
ĐS: a) 24. b) 620. c) 750 d) 66 e) 714. f) 2401 g) 444.

Bài 2: Hoán vị

I. Giai thừa:

$n! = 1.2.3\ldots n$ $\qquad$ $n! = (n-1)!n$

$\frac{n!}{p!} = (p+1).(p+2)\ldots n$ (với $n>p$) $\qquad$ $\frac{n!}{(n-p)!} = (n-p+1).(n-p+2)\ldots n$ (với $n>p$)

II. Hoán vị không lặp:

Một tập hợp gồm n phần tử (n>=1). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số các hoán vị của n phần tử là: $P_n = n!$

III. Hoán vị lặp: (*tham khảo*)

Cho k phần tử khác nhau: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. *Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm* n_1 *phần tử* a_1, n_2 *phần tử* a_2, …, n_k *phần tử* a_k $(n_1+n_2+\ldots+n_k = n)$ *theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp cấp n và kiểu* $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *của k phần tử.*

Số các hoán vị lặp cấp n, kiểu $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *của k phần tử là:*

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

IV. Hoán vị vòng quanh: (*tham khảo*)

Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.

Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là: $Q_n = (n-1)!$

Ví dụ 1: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 2, 3 ?

ĐS: $P_3 = 3! = 6$ *(số)*

Ví dụ 2: Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt đúng 3 lần, chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, và mỗi chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần?

ĐS: $P_8(3,2,1,1,1) = \frac{8!}{3!2!} = 3360$ *(số)*

Ví dụ 3: Tìm số cách chia 10 người thành 3 nhóm, sao cho số người trong mỗi nhóm theo thứ tự là 2, 3, 5?

ĐS: $P_{10}(2,3,5) = \frac{10!}{2!3!5!} = 2520$ *cách*

Ví dụ 4: Có 6 người khách ngồi xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi?

ĐS: $Q_6 = 5! = 120$ *cách.*

Ví dụ 5: Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước: Anh có 3 người, Pháp có 5 người, Đức có 2 người, Nhật có 3 người, Mỹ có 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho các người cùng quốc tịch thì ngồi cạnh nhau?

ĐS:
- *Số cách sắp xếp các phái đoàn:* $Q_5 = 4!$
- *Số cách sắp xếp cho phái đoàn Anh:* $3!$
- *Số cách sắp xếp cho phái đoàn Pháp:* $5!$
- *Số cách sắp xếp cho phái đoàn Đức:* $2!$
- *Số cách sắp xếp cho phái đoàn Nhật:* $3!$
- *Số cách sắp xếp cho phái đoàn Mỹ:* $4!$

$\Rightarrow$ *Có* $4!3!5!2!3!4!$ *cách*

Bài tập

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

A = $\frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!}-\frac{9!}{2!7!}\right)$ B = $\frac{2011!}{2010!-2009!}.\frac{2009}{2011}$ C = $\frac{5!}{m(m+1)}.\frac{(m+1)!}{(m-1)!3!}$

D = $\frac{7!}{(m^2+m)}.\frac{(m+2)!}{4!(m-1)!}$ E = $\sum_{k=1}^{n} k.k!$ F = $\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k!}$

G = $\frac{6!}{(m-2)(m-3)}.\left[\frac{1}{(m+1)(m-4)}.\frac{(m+1)!}{(m-5)!5!}-\frac{m.(m-1)!}{12.(m-4)!3!}\right]$ (với $m \geq 5$)

ĐS: $A=\frac{2}{3}$ $B=2010$ $C=20$ $D=210(m+2)$ $G=$

$E=(n+1)!-1$ *(chú ý:* $k.k!=(k+1)!-k!$*)* $F=1-\frac{1}{n!}$ *(chú ý:* $\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$*)*

Bài 2: Chứng minh rằng:

a) $P_n-P_{n-1}=(n-1)P_{n-1}$ b) $P_n=(n-1)P_{n-1}+(n-2)P_{n-2}+...+2P_2+P_1+1$

c) $\frac{n^2}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}$ d) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<3$ e) $n!\geq 2^{n-1}$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{1}{n-2}\left(\frac{5}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(n-3)!4!}-\frac{n.(n-1)!}{12(n-3).(n-4)!2!}\right)\leq 5$ b) $n^3+\frac{n!}{(n-2)!}\leq 10$

c) $4\leq n!+(n+1)!<50$

ĐS: a) $\Leftrightarrow \frac{(n-1)n}{6}\leq 5 \Rightarrow$ *n = 4, n = 5, n = 6   b)   c) n = 2, n = 3*

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $P_2.x^2-P_3.x=8$ b) $\frac{P_x-P_{x-1}}{P_{x+1}}=\frac{1}{6}$ c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=72$

d) $\frac{n!}{(n-2)!}-\frac{n!}{(n-1)!}=3$ e) $\frac{n!}{20n}=(n-3)!$ f) $n^3+\frac{n!}{(n-2)!}=10$

ĐS: a) x = –1; x = 4   b) x = 2; x = 3   c) n = 8
d) n = 3   e) n = 6   f) n = 2

Bài 5: Trên một kệ sách có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên:

a) Một cách tuỳ ý?   b) Theo từng môn?

c) Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa?

ĐS: a) P_{12} *b) 3!(5!4!3!)   c) 2!(5!4!3!)*

Bài 6: Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một chiếc ghế dài sao cho:

a) Bạn C ngồi chính giữa?   b) Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế?

ĐS: a) 24.   b) 12.

Bài 7: Sắp xếp 10 người vào một dãy ghế. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi nếu:

a) Có 5 người trong nhóm muốn ngồi kề nhau?

b) Có 2 người trong nhóm không muốn ngồi kề nhau?

ĐS: a) 86400.   b) 2903040.

Bài 8: Sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi nếu:

a) Nam sinh ngồi kề nhau, nữ sinh ngồi kề nhau?
b) Chỉ có nữ ngồi kề nhau?
ĐS: a) 34560. b) 120960.

Bài 9: Có bao nhiêu cách sắp xếp 12 học sinh đứng thành 1 hàng để chụp ảnh lưu niệm, biết rằng trong đó phải có 5 em định trước đứng kề nhau?
ĐS: 4838400.

Bài 10: Có 2 đề kiểm tra toán để chọn đội học sinh giỏi được phát cho 10 học sinh khối 11 và 10 học sinh khối 12. Có bao nhiêu cách sắp xếp 20 học sinh trên vào 1 phòng thi có 5 dãy ghế sao cho hai em ngồi cạnh nhau có đề khác nhau, còn các em ngồi nối đuôi nhau có cùng một đề?
ĐS: 26336378880000.

Bài 11: Có 3 viên bi đen (khác nhau), 4 viên bi đỏ (khác nhau), 5 viên bi vàng (khác nhau), 6 viên bi xanh (khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?
ĐS: 298598400.

Bài 12: Trên giá sách có 30 tập sách. Có thể sắp xếp theo bao nhiêu cách khác nhau để có:
a) Tập 1 và tập 2 đứng cạnh nhau?
b) Tập 5 và tập 6 không đứng cạnh nhau?
ĐS: a) 2.29!. b) 28.29!.

Bài 13: Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:
a) Bắt đầu bằng chữ số 5? b) Không bắt đầu bằng chữ số 1?
c) Bắt đầu bằng 23? d) Không bắt đầu bằng 345?
ĐS: a) 4! b) 5! – 4! c) 3! d) 5! – 2!

Bài 14: Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 3, 5, 7, 9. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:
a) Bắt đầu bởi chữ số 9? b) Không bắt đầu bởi chữ số 1?
c) Bắt đầu bởi 19? d) Không bắt đầu bởi 135?
ĐS: a) 24. b) 96. c) 6 d) 118.

Bài 15: Với mỗi hoán vị của các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ta được một số tự nhiên. Tìm tổng tất cả các số tự nhiên có được từ các hoán vị của 7 phần tử trên?
ĐS: Với mọi i, j $\in \{1,2,3,4,5,6,7\}$*, số các số mà chữ số j ở hàng thứ i là 6!.*
$\Rightarrow$ *Tổng tất cả các số là:* $(6!1+\ldots+6!7) + (6!1+\ldots+6!7).10 + \ldots + (6!1+\ldots+6!7).10^6$
$= 6!\,(1+2+\ldots+7).(1+10+\ldots+10^6)$

Bài 16: Tìm tổng S của tất cả các số tự nhiên, mỗi số được tạo thành bởi hoán vị của 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.
ĐS: 279999720.

Bài 17: Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và khác 0 biết rằng tổng của 3 chữ số này bằng 9.
ĐS: 18.

Bài 18: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có 6 chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?
ĐS: 480.

Bài 19: Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt đúng 3 lần, chữ số 2 có mặt đúng 2 lần và mỗi chữ số còn lại có mặt đúng một lần?
ĐS: 3360.

Bài 20: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?
ĐS: $\frac{8!}{3!} - \frac{7!}{3!} = 5880$

Bài 21: Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và 4 chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu:

a) 5 chữ số 1 được xếp kề nhau?

b) Các chữ số được xếp tuỳ ý?

ĐS: a) 120. b) 3024.

Bài 22: Có 5 học sinh nam là A1, A2, A3, A4, A5 và 3 học sinh nữ B1, B2, B3 được xếp ngồi xung quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

a) Một cách tuỳ ý? b) A1 không ngồi cạnh B1?

c) Các học sinh nữ không ngồi cạnh nhau?

ĐS: a) $Q_8 = 7!$ b) $Q_7 = 6!$ c) Có 4!5.4.3 cách sắp xếp

Bài 23: Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước: Mỹ 5 người, Nga 5 người, Anh 4 người, Pháp 6 người, Đức 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch ngồi gần nhau?

ĐS: 143327232000.

Bài 3: Chỉnh hợp

I. Chỉnh hợp:

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A ($0 \le k \le n$) được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

II. Chỉnh hợp lặp: (*tham khảo*)

Cho tập A gồm n phần tử. Một dãy gồm k phần tử của A, trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập A.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{A_n^k} = n^k$

Ví dụ 1: Từ các số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm các chữ số khác nhau?

ĐS: • Các số gồm 5 chữ số: $S_5 = A_5^5 - A_4^4 = 96$

• Các số gồm 4 chữ số: $S_4 = A_5^4 - A_4^3 = 96$ *• Các số gồm 3 chữ số:* $S_3 = A_5^3 - A_4^2 = 48$

• Các số gồm 2 chữ số: $S_2 = A_5^2 - A_4^1 = 16$ *• Các số gồm 1 chữ số:* $S_1 = 5$

⇒ Có 96 + 96 + 48 + 16 + 5 = 261 số

Ví dụ 2: Có 10 đội bóng thi đấu vòng tròn 2 lượt. Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu?

ĐS: Có $A_{10}^2 = 90$ *trận*

Ví dụ 3: Cho 3 chữ số 1, 2, 3. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số được thành lập từ 3 chữ số trên?

ĐS: $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$

Ví dụ 4: Một "từ" k chữ cái là một dãy gồm k chữ cái viết liên tiếp (dù có nghĩa hay không). Với 2 chữ cái a, b có thể viết được bao nhiêu từ có 10 chữ cái?

ĐS: $\overline{A_2^{10}} = 2^{10}$ *từ*

Bài tập

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{A_5^2}{P_2} + \frac{A_{10}^5}{7P_5}$$

$$B = P_1A_2^1 + P_2A_3^2 + P_3A_4^3 + P_4A_5^4 - P_1P_2P_3P_4$$

$$C = \frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \frac{A_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}$$

$$D = \left(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3} + \frac{P_3}{A_5^2} + \frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2$$

$$E = \frac{39A_{49}^{10}}{38A_{49}^{10} + A_{49}^{11}} + \frac{12!(5!-4!)}{13!4!}$$

$$F = \frac{21(P_3 - P_2)}{20\left(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3} + \frac{P_3}{A_5^2} + \frac{P_2}{A_5^1}\right)}$$

ĐS: A = 46; B = 2750; C = 1440; D = 42; $E = \frac{815}{1001}$; *F = 2.*

Bài 2: Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+ ... +\frac{1}{A_n^2}=\frac{n-1}{n}$, *với* $n \in N, n \geq 2.$

b) $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2.A_{n+k}^{n}$ với $n, k \in N, k \geq 2$

c) $A_n^k = A_{n-1}^k + k.A_{n-1}^{k-1}$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $A_n^3 = 20n$ b) $A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15)$ c) $3A_n^2 - A_{2n}^2 + 42 = 0.$

d) $\frac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4}.P_3} = 210$ e) $2(A_n^3 + 3A_n^2) = P_{n+1}$ f) $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$

g) $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8.$ h) $P_x.A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$ i) $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$

k) $\frac{A_{x+1}^{y+1}.P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72.$ l) $P_{n+3} = 720A_n^5.P_{n-5}$ m) $A_n^6 + A_n^5 = A_n^4$

ĐS: *a) n = 6* *b) n = 3* *c) n = 6* *d) n = 5*
e) n = 4 *f) n = 2; 3* *g) x = 11.* *h) x = 3; 4.*
i) x = 5. *k) x = 8,* $y \leq 7, y \in N$.

Bài 4: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$ b) $\frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0$ c) $A_n^3 + 15 < 15n$

d) $A_n^3 < A_n^2 + 12$ e) $\frac{A_{n+1}^1}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0$

ĐS: *a) n = 3; 4; 5* *b)* $2 \leq n \leq 36$

Bài 5: Tìm các số âm trong dãy số $x_1, x_2, x_3,... , x_n$ với: $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4.P_n}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$

ĐS: $n_1 = 1, x_1 = -\frac{63}{4}$; $n_2 = 2, x_2 = -\frac{23}{8}$.

Bài 6: Một cuộc khiêu vũ có 10 nam và 6 nữ. Người ta chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

ĐS: *Có* $A_{10}^3.A_6^3$ *cách*

Bài 7: Trong không gian cho 4 điểm A, B, C, D. Từ các điểm trên ta lập các vectơ khác vectơ – không. Hỏi có thể có được bao nhiêu vectơ?

ĐS: A_4^2 *= 12 vectơ*

Bài 8: Từ 20 học sinh cần chọn ra một ban đại diện lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thư ký. Hỏi có mấy cách chọn?
ĐS: 6840.

Bài 9: Huấn luyện viên một đội bóng muốn chọn 5 cầu thủ để đá quả luân lưu 11 mét. Có bao nhiêu cách chọn nếu:
a) Cả 11 cầu thủ có khả năng như nhau? (kể cả thủ môn).
b) Có 3 cầu thủ bị chấn thương và nhất thiết phải bố trí cầu thủ A đá quả số 1 và cầu thủ B đá quả số 4.
ĐS: a) 55440. b) 120.

Bài 10: Một người muốn xếp đặt một số pho tượng vào một dãy 6 chỗ trống trên một kệ trang trí. Có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

a) Người đó có 6 pho tượng khác nhau?
b) Người đó có 4 pho tượng khác nhau?
c) Người đó có 8 pho tượng khác nhau?
ĐS: a) 6!. b) 360. c) 20160.

Bài 11: Từ các chữ số 0, 1, 2, …, 9, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số:
a) Các chữ số khác nhau?
b) Hai chữ số kề nhau phải khác nhau?

ĐS: a) $9.A_9^4$ *b) Có* 9^5 *số*

Bài 12: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu:
a) Số gồm 5 chữ số khác nhau?
b) Số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau?
c) Số gồm 5 chữ số khác nhau và phải có mặt chữ số 5?

ĐS: a) $6.A_6^4$ *b)* $6.A_5^3 + 3.5A_5^3$

c) Số gồm 5 chữ số có dạng: $\overline{abcde}$

• *Nếu a = 5 thì có* A_6^4 *số*

• *Nếu a ≠ 5 thì a có 5 cách chọn. Số 5 có thể đặt vào 1 trong các vị trí b, c, d, e ⇒ có 4 cách chọn vị trí cho số 5. 3 vị trí còn lại có thể chọn từ 5 chữ số còn lại ⇒ có* A_5^3 *cách chọn.*

⇒ Có $A_6^4 + 4.5.A_5^3$ *= 1560 số*

Bài 13: Từ các chữ số 0, 1, 2, …, 9 có thể lập bao nhiêu biển số xe gồm 3 chữ số (trừ số 000)?

ĐS: $\overline{A_{10}^3} - 1 = 999$

Bài 14: Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số với:
a) Chữ số đầu và chữ số cuối giống nhau?
b) Chữ số đầu và cuối khác nhau?
c) Hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau?

ĐS: a) $9.\overline{A_{10}^4} = 9.10^4$ *số*

b) Có tất cả: $\overline{A_{10}^6} - \overline{A_{10}^5} = 9.10^5$ *số gồm 6 chữ số ⇒ Có* $9.10^5 - 9.10^4$ *số*

c) Có 9.10.10.10 = 9000 số

Bài 15: Có bao nhiêu số điện thoại có 6 chữ số? Trong đó có bao nhiêu số điện thoại có 6 chữ số khác nhau?

ĐS: a) $\overline{A_{10}^6} = 10^6$ *b)* $A_{10}^6 = 15120$

Bài 16: Một biển số xe gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, C, …, Z. Các chữ số được lấy từ 10 chữ số 0, 1, 2, …, 9. Hỏi:
a) Có bao nhiêu biển số xe trong đó có ít nhất một chữ cái khác chữ cái O và các chữ số đôi một khác nhau?
b) Có bao nhiêu biển số xe có hai chữ cái khác nhau và có đúng 2 chữ số lẻ giống nhau?

ĐS: a) Số cách chọn 2 chữ cái: 26 × 26 – 1 = 675 cách

Số cách chọn 4 chữ số: A_{10}^4 *= 5040 cách*

⇒ Số biển số xe: 675 × 5040 = 3.402.000 số

b) • Chữ cái thứ nhất: có 26 cách chọn
Chữ cái thứ hai: có 25 cách chọn

• *Các cặp số lẻ giống nhau có thể là: (1;1), (3;3), (5;5), (7;7), (9;9)*

⇒ Có 5 cách chọn 1 cặp số lẻ.

Xếp một cặp số lẻ vào 4 vị trí ⇒ có C_4^2 *cách*

⇒ Có $5.C_4^2$ *cách sắp xếp cặp số lẻ.*

• Còn lại 2 vị trí là các chữ số chẵn:
Chữ số chẵn thứ nhất: có 5 cách chọn
Chữ số chẵn thứ hai: có 5 cách chọn

⇒ Có $26 \times 25 \times 5 \times C_4^2 \times 5 \times 5 = 487500$ *cách*

Bài 17: a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau mà tổng các chữ số đó bằng 18?
b) Hỏi có bao nhiêu số lẻ thoả mãn điều kiện đó?
ĐS: *Chú ý:* $18 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 8$
$18 = 0 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7$
$18 = 0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 6$
a) $3 \times 5 \times 5!$ *b)* $192 + 384 + 192 = 768$ *số*

Bài 18: Với 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau và thoả:
a) Số chẵn. b) Bắt đầu bằng số 24. c) Bắt đầu bằng số 345.
d) Bắt đầu bằng số 1? Từ đó suy ra các số không bắt đầu bằng số 1?
ĐS: a) 312. b) 24. c) 6. d) 120 ; 480.

Bài 19: Cho tập hợp X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Có thể lập được bao nhiêu số *n* gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ X trong mỗi trường hợp sau:
a) *n* là số chẵn?
b) Một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1?
ĐS: a) 3000. b) 2280. *(ĐHQG TP.HCM, 99, khối D, đợt 2)*

Bài 20: a) Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 6, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.
b) Từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1. *(HVCN Bưu chính Viễn thông, 1999)*
c) Từ 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4.
ĐS: a) 18. b) 42000. c) 13320.

Bài 21: a) Tính tổng của tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được tạo thành từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8.
b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Tính tổng của các số này.
ĐS: a) 37332960. b) 96 ; 259980.

Bài 22: a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 10 (chữ số hàng vạn khác 0). *(ĐH Đà Nẵng, 2000, khối A, đợt 1)*
b) Cho 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 9. Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600000 xây dựng từ 10 chữ số đã cho. *(ĐH Y khoa Hà Nội, 1997)*
ĐS: a) 3024. b) 36960.

Bài 4: Tổ hợp

I. Tổ hợp không lặp:

Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k ($0 \le k \le n$) phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Tính chất:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$
$$C_n^k = C_n^{n-k}$$
$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$
$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

II. Tổ hợp lặp: (*tham khảo*)

Cho tập A = $\{a_1; a_2; ...; a_n\}$ và số tự nhiên k bất kì. Một tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một hợp gồm k phần tử, trong đó mỗi phần tử là một trong n phần tử của A.

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{m-1}$

III. Phân biệt chỉnh hợp và tổ hợp:

- *Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ nhau bởi công thức:* $A_n^k = k!C_n^k$
- *Chỉnh hợp: có thứ tự, Tổ hợp: không có thứ tự.*

⇒ Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử –> chỉnh hợp
Ngược lại, là tổ hợp.

- *Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử ($k \le n$):*
  - *+ Không thứ tự, không hoàn lại:* C_n^k
  - *+ Có thứ tự, không hoàn lại:* A_n^k
  - *+ Có thứ tự, có hoàn lại:* $\overline{A_n^k}$

Ví dụ 1: Cho tập A = $\{a,b,c\}$. Tìm số các tập con gồm 2 phần tử của tập A?

ĐS: $C_3^2 = 3$

Ví dụ 2: Tìm số đường chéo của đa giác lồi 10 cạnh?

ĐS: $C_{10}^2 - 10 = 35$

Ví dụ 3: Có bao nhiêu cách chia một lớp 40 học sinh thành 4 tổ I, II, III, IV sao cho mỗi tổ có 10 học sinh?

ĐS: • *Lập tổ I: có* C_{40}^{10} *cách, Lập tổ 2: có* C_{30}^{10} *cách, Lập tổ III: có* C_{20}^{10} *cách,*

Lập tổ IV: có C_{10}^{10} *cách.*

⇒ Có: $C_{40}^{10}.C_{30}^{10}.C_{20}^{10}.C_{10}^{10}$ *cách.*

Ví dụ 4: Các tổ hợp lặp chập 3 của 2 phần tử *a, b* là: *aaa, aab, abb, bbb*

Ví dụ 5: Các tổ hợp lặp chập 2 của 3 phần tử *a, b, c* là: *aa, bb, cc, ab, ac, bc.*

Bài tập

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức tổ hợp

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

A = $C_{25}^{23} - C_{15}^{13} - 3C_{10}^{7}$ B = $\dfrac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \dfrac{A_3^2}{P_2}$ C = $\dfrac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$

D = $\dfrac{C_{15}^5 + 2C_{15}^6 + C_{15}^7}{C_{17}^7}$

ĐS: A = – 165; B = 4; C = 1; D = 1

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

A = $C_n^n.C_{2n}^n.C_{3n}^n$; B = $\dfrac{P_{n+2}}{A_n^k.P_{n-k}} + \dfrac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$;

C = $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + \ldots + k\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} + \ldots + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$

ĐS: $A = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$ *B = (n+1)(n+2) + 1* $C = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức tổ hợp

Bài 1: Chứng minh các hệ thức sau:

a) $C_n^k.C_{n-k}^{p-k} = C_n^p.C_p^k \quad (k \le p \le n)$

b) $C_n^k = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} \quad (1 \le k \le n)$

c) $C_n^{k+1} + 2C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+2}^{k+1}$

d) $C_n^m.C_m^k = C_n^k.C_{n-k}^{m-k} \quad (0 \le k \le m \le n)$

e) $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$

f) $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \quad (2 < k < n)$

g) $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k \quad (3 \le k \le n)$

h) $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k \quad (4 \le k \le n)$

ĐS: Sử dụng tính chất: $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

Bài 2: Chứng minh các hệ thức sau:

a) $C_r^0.C_q^p + C_r^1.C_q^{p-1} + \ldots + C_r^p.C_q^0 = C_{r+q}^p$

b) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

c) $C_{2p}^0 + C_{2p}^2 + C_{2p}^4 + \ldots + C_{2p}^{2p} = C_{2p}^1 + C_{2p}^3 + \ldots + C_{2p}^{2p-1} = c^{2p-1}$

d) $1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^p$

ĐS: a) Sử dụng khai triển: $(1+x)^r.(1+x)^q = (1+x)^{r+q}$. *So sánh hệ số của* x^p *ở 2 vế.*

b) Sử dụng câu a) với p = q = r = n

c) Sử dụng $(x+y)^{2p}$ *và* $(x-y)^{2p}$

d) Sử dụng $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$, *với r lẻ thì nhân 2 vế với –1.*

Dạng 3 : Chứng minh bất đẳng thức tổ hợp

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^{2n}}.C_{2n}^{n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ($n \in N, n \geq 1$)

HD: Biến đổi vế trái: $\frac{1}{2^{2n}}.C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}.n!n!} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$

Vậy ta phải chứng minh: $\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Ta có: $\frac{2k-1}{2k} = \frac{(\sqrt{2k-1})^2}{\sqrt{4k^2}} < \frac{(\sqrt{2k-1})^2}{\sqrt{4k^2-1}} = \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}$

Cho k lần lượt từ 1, 2, …, n, rồi nhân các BĐT vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 2: Chứng minh rằng: $C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n} \leq (C_{2n}^{n})^2$ (với k, $n \in N$, $0 \leq k \leq n$)

HD: • Đặt $u_k = C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n}$ *(k = 0;1;…;n)*

Ta chứng minh: $u_k > u_{k+1}$ *(*)*

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n} > C_{2n+k+1}^{n}.C_{2n-k-1}^{n} \Leftrightarrow n + 2nk > 0$

Điều này luôn luôn đúng $\Rightarrow$ *đpcm.*

Dạng 4: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức tổ hợp

Bài 1: a) Chứng minh: $C_n^{k-1} < C_n^k$ với $n = 2m$, $k \leq m$. Từ đó suy ra C_n^m là lớn nhất.

b) Chứng minh: $C_n^{k-1} < C_n^k$ với $n = 2m + 1$, $k \leq m$.

Từ đó suy ra $C_n^m; C_n^{m+1}$ là lớn nhất.

HD: a) Theo tính chất: $C_n^k = \frac{n-k+1}{k}.C_n^{k-1} \Rightarrow \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n+1}{k} - 1$

Với $k \leq m \Rightarrow 2k \leq n \Rightarrow \frac{n+1}{k} - 1 > 1 \Rightarrow C_n^k > C_n^{k-1}$

Vì $C_n^k = C_n^{n-k}$ *nên* C_n^k *lớn nhất.*

b) Tương tự

Bài 2: Cho $n > 2$, $p \in [1; n]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của C_n^p.

HD: Vì $C_n^p = C_n^{n-p}$ *nên ta chỉ cần xét* $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$

Ta có: $C_n^p > C_n^{p-1} \Leftrightarrow \frac{C_n^p}{C_n^{p-1}} = \frac{n-p+1}{p} > 1 \Leftrightarrow p < \frac{n+1}{2}$

Vậy C_n^p *nhỏ nhất khi p = 1 hoặc p = n – 1, ứng với* $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

C_n^p *lớn nhất khi* $p = \frac{n-1}{2}$ *(nếu n lẻ) hoặc* $p = \frac{n}{2}$ *(nếu n chẵn)*

Bài 3: Với giá trị nào của p thì C_n^p lớn nhất.

HD: Ta có: $\dfrac{C_m^p}{C_m^{p-1}} = \dfrac{m-p+1}{p} = \dfrac{m+1}{p} - 1$. *Tỉ số này giảm khi p tăng.*

- $C_m^p > C_m^{p-1} \Leftrightarrow \dfrac{m-p+1}{p} \ge 1$, *do đó:* $p \le \dfrac{m+1}{2}$
- *Nếu m chẵn:* $m = 2k \Rightarrow p \le k + \dfrac{1}{2}$

Để $C_m^p > C_m^{p-1}$ *ta phải có:* $p \le k + \dfrac{1}{2}$, *vì p, k* $\in$ *N nên chọn p = k*

- *Nếu m lẻ:* $m = 2k + 1 \Rightarrow p \le k + 1$, *ta sẽ có:*

$$\frac{C_m^p}{C_m^{p-1}} = 1 \text{ khi } p = k + 1 \Rightarrow C_m^p = C_{2k+1}^{k+1} = \frac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}$$

* *Áp dụng bài toán này ta có thể giải nhiều bài toán khác. Ví dụ:*
Có 25 học sinh. Muốn lập thành những nhóm gồm p học sinh. Tìm giá trị của p để được số cách chia nhóm là lớn nhất? Tìm số cách chia nhóm đó.

* *Vì có 25 học sinh, chọn p em nên số nhóm có thể lập là* C_{25}^p.

Theo trên, ta có m = 25 (lẻ) với k = 12 do đó C_{25}^p *lớn nhất khi p = k + 1 = 13.*

Vậy p = 13, khi đó: số nhóm tối đa có thể lập: $C_{25}^{13} = 5200300$.

Dạng 5 : Giải phương trình, bất phương trình có chứa biểu thức tổ hợp

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \dfrac{24}{23}$ b) $\dfrac{1}{C_4^x} - \dfrac{1}{C_5^x} = \dfrac{1}{C_6^x}$ c) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

d) $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}$ e) $x^2 - C_4^x.x + C_3^2.C_3^1 = 0$ f) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$

g) $C_{8+x}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$ h) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$ i) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$

k) $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$ l) $\dfrac{C_{28}^{2x}}{C_{24}^{2x-4}} = \dfrac{225}{52}$ m) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \dfrac{7}{2}x$

n) $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \ldots + C_x^{x-10} = 1023$ o) $\dfrac{1}{C_x^1} - \dfrac{1}{C_{x+1}^2} = \dfrac{7}{6C_{x+4}^1}$

ĐS: *a) n = 5* *b) x = 2* *c) x = 7* *d) x = 14; x = 8* *e) x = 3*
f) x = 10 *g) x = 17* *h) x = 5* *i) x = 5* *k) x = 8*
l) x = 7 *m) x = 4* *n) x = 10* *o) x = 3; x = 8*

Bài 2: Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \dfrac{1}{14P_3}$ b) $\dfrac{P_{n+5}}{(n-k)!} \le 60A_{n+3}^{k+2}$ c) $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0$

d) $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$ e) $\dfrac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \dfrac{6}{x}C_x^3 + 10$ f) $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \le 100$

ĐS: a) đk: $n \ge 3$, $n^2 + n - 42 > 0 \Leftrightarrow n \ge 6$

b) $\begin{cases} k \le n \\ (n+5)(n+4)(n-k+1) \le 0 \end{cases}$

• *Xét với* $n \ge 4$*: bpt vô nghiệm*

• *Xét* $n \in \{0,1,2,3\}$ *ta được các nghiệm là: (0;0), (1;0), (1;1), (2;2), (3,3)*

c) đk: $n \ge 5$, $n^2 - 9n - 22 < 0 \Rightarrow n = 5; 6; 7; 8; 9; 10$

d) $x = 2$ *e)* $x = 3, x = 4$

Bài 3: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x-1}} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x-1} = 720 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{A_y^{x+1}}{P_x} + C_y^{y-x-1} = 126 \\ P_{x+2} = 720 \end{cases}$ c) $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \dfrac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \dfrac{1}{24} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$ e) $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases}$

g) $\dfrac{C_{x+1}^y}{6} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5} = \dfrac{C_x^{y-1}}{2}$ h) $\begin{cases} 7A_{5x}^{y-3} = A_{5x}^{y-2} \\ 4C_{4x}^{y-2} = 7C_{5x}^{y-3} \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2A_x^y + C_x^y = 180 \\ A_x^y - C_x^y = 36 \end{cases}$

ĐS: a) $x = 5, y = 7$ *b)* $x = 4,\ y = 7$ *c)* $x = 4,\ y = 8$ *d)* $x = 5,\ y = 2$

e) $x = 17, y = 8$ *f)* $x = 7,\ y = 4$ *g)* $x = 8, y = 3$ *h)*

i)

Bài 4: Tìm số tự nhiên *k* sao cho $C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$ lập thành một cấp số cộng.

ĐS: k = 4; 8.

Dạng 6: Tìm số tổ hợp trong các bài toán số học

Bài 1: Cho 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi?

ĐS: • *Đề gồm 2 câu lý thuyết và 1 bài tập:* $C_4^2.C_6^1 = 36$

• *Đề gồm 1 câu lý thuyết và 2 bài tập:* $C_4^1.C_6^2 = 60$

Vậy có: 36 + 60 = 96 đề thi.

Bài 2: Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) Gồm 4 học sinh tuỳ ý. b) Có 1 nam và 3 nữ. c) Có 2 nam và 2 nữ.

d) Có ít nhất 1 nam. e) Có ít nhất 1 nam và 1 nữ.

ĐS: a) C_{40}^4 *b)* $C_{25}^1.C_{15}^3$ *c)* $C_{25}^2.C_{15}^2$ *d)* $C_{25}^1.C_{15}^3 + C_{25}^2.C_{15}^2 + C_{25}^3.C_{15}^1 + C_{25}^4$

e) $C_{40}^4 - C_{25}^4 - C_{15}^4$

Bài 3: Cho 5 điểm trong mặt phẳng và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu vectơ tạo thành từ 5 điểm ấy? Có bao nhiêu đoạn thẳng tạo thành từ 5 điểm ấy?

ĐS: 20 ; 10.

Bài 4: Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

ĐS: 1200.

Bài 5: Một túi chứa 6 viên bi trắng và 5 viên bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó, có bao nhiêu cách lấy được:

a) 4 viên bi cùng màu? b) 2 viên bi trắng, 2 viên bi xanh?

ĐS: a) 20. b) 150.

Bài 6: Từ 20 người, chọn ra một đoàn đại biểu gồm 1 trưởng đoàn, 1 phó đoàn, 1 thư ký và 3 ủy viên. Hỏi có mấy cách chọn?

ĐS: 4651200.

Bài 7: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn ra một bó hóa gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó:

a) Có đúng 1 bông hồng đỏ?

b) Có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ?

ĐS: a) 112 b) 150.

Bài 8: Từ một tập thể 14 người gồm 6 năm và 8 nữ trong đó có An và Bình, người ta muốn chọn một tổ công tác gồm có 6 người. Tìm số cách chọn trong mỗi trường hợp sau:

a) Trong tổ phải có cả nam lẫn nữ?

b) Trong tổ có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên hơn nữa An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ?

ĐS: a) 2974. b) 15048. *(ĐH Kinh tế, Tp.HCM, 2001)*

Bài 9: Một đoàn tàu có 3 toa chở khách. Toa I, II, III. Trên sân ga có 4 khách chuẩn bị đi tàu. Biết mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa.

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu có 1 toa có 3 trong 4 vị khách nói trên.

ĐS: a) 99. b) 24. *(ĐH Luật Hà Nội, 1999)*

Bài 10: Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành hai tổ, mỗi tổ 8 học sinh sao cho mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất hai học sinh khá.

ĐS: 3780. *(HVKT Quân sự, 2001)*

Bài 11: Từ tập X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} có thể lập được bao nhiêu số:

a) Chẵn gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi một và chữ số đứng đầu là chữ số 2?

b) Gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi một sao cho 5 chữ số đó có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ?

ĐS: a) 360. b) 2448. *(ĐH Cần Thơ, 2001)*

Bài 12: Từ 8 số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 10 chữ số được chọn từ 8 chữ số trên, trong đó chữ số 6 có mặt đúng 3 lần, chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

ĐS: 544320. *(HVCNBCVT, Tp.HCM, 1999)*

Bài 13: a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0), trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có chữ số 1).

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.

ĐS: a) 33600 b) 11340. *(ĐH QG, Tp.HCM, 2001)*

Bài 14: Người ta viết các số có 6 chữ số bằng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 như sau: Trong mỗi số được viết có một chữ số xuất hiện hai lần còn các chữ số còn lại xuất hiện một lần. Hỏi có bao nhiêu số như vậy?

ĐS: 1800. *(ĐH Sư phạm Vinh, 1998)*

Dạng 7: Tìm số tổ hợp trong các bài toán hình học

Bài 1: Trong mặt phẳng cho *n* đường thẳng cắt nhau từng đôi một, nhưng không có 3 đường nào đồng quy. Hỏi có bao nhiêu giao điểm? Có bao nhiêu tam giác được tạo thành?

ĐS: • *Số giao điểm:* $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ • *Số tam giác:* $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Bài 2: Cho 10 điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.
a) Có bao nhiêu đường thẳng đi qua từng cặp điểm?
b) Có bao nhiêu vectơ nối từng cặp điểm?
c) Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là 3 trong 10 điểm trên?
d) Nếu trong 10 điểm trên không có 4 điểm nào đồng phẳng, thì có bao nhiêu tứ diện được tạo thành?

ĐS: a) C_{10}^2 *b)* A_{10}^2 *c)* C_{10}^3 *d)* C_{10}^4

Bài 3: Cho đa giác lồi có *n* cạnh $(n \geq 4)$
a) Tìm *n* để đa giác có số đường chéo bằng số cạnh?
b) Giả sử 3 đường chéo cùng đi qua 1 đỉnh thì không đồng qui. Hãy tính số giao điểm (không phải là đỉnh) của các đường chéo ấy?

ĐS: a) $C_n^2 - n = n \Leftrightarrow n = 5$

b) Giao điểm của 2 đường chéo của 1 đa giác lồi (không phải là đỉnh) chính là giao điểm của 2 đường chéo một tứ giác mà 4 đỉnh của nó là 4 đỉnh của đa giác. Vậy số giao điểm phải tìm bằng số tứ giác với 4 đỉnh thuộc n đỉnh của đa giác: C_n^4

Bài 4: Cho một đa giác lồi có *n*-cạnh $(n \in N, n \geq 3)$.
a) Tìm số đường chéo của đa giác. Hãy chỉ ra 1 đa giác có số cạnh bằng số đường chéo?
b) Có bao nhiêu tam giác có đỉnh trùng với đỉnh của đa giác?
c) Có tối đa bao nhiêu giao điểm giữa các đường chéo?

ĐS: a) $\dfrac{n(n-3)}{2}$; $n = 5$. b) $\dfrac{(n-2)(n-1)n}{6}$. c) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Bài 5: Tìm số giao điểm tối đa của:
a) 10 đường thẳng phân biệt? b) 10 đường tròn phân biệt?
c) 10 đường thẳng và 10 đường tròn trên?
ĐS: a) 45. b) 90. c) 335.

Bài 6: Cho hai đường thẳng song song (d1), (d2). Trên (d1) lấy 17 điểm phân biệt, trên (d2) lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên (d1) và (d2).
ĐS: 5950. *(ĐH SP Quy Nhơn, 1997)*

Bài 7: Cho mặt phẳng cho đa giác đều H có 20 cạnh. Xét các tam giác có ba đỉnh được lấy từ các đỉnh của H.
a) Có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy? Có bao nhiêu tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của H?
b) Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H? Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của H?
ĐS: a) 1140; 20. b) 320 ; 80. *(HVNH, 2000, khối D)*

Bài 8: Có 10 điểm A, B, C, ... trên mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.
a) Nối chúng lại ta được bao nhiêu đường thẳng? Trong đó có bao nhiêu đường không đi qua A hay B?
b) Có bao nhiêu tam giác đỉnh bởi các điểm trên? Bao nhiêu tam giác chứa điểm A? Bao nhiêu tam giác chứa cạnh AB?
ĐS: a) 45; 28. b) 120 ; 36 ; 8.

Bài 9: Có p điểm trong mặt phẳng trong đó có q điểm thẳng hàng, số còn lại không có 3 điểm

nào thẳng hàng. Nối p điểm đó lại với nhau. Hỏi:

a) Có bao nhiêu đường thẳng? b) Chúng tạo ra bao nhiêu tam giác?

ĐS: a) $\frac{1}{2}p(p-1)-q(q-1)+2;$. b) $\frac{1}{6}p(p-1)(p-2)-q(q-1)(q-2)$.

Bài 10: Cho p điểm trong không gian trong đó có q điểm đồng phẳng, số còn lại không có 4 điểm nào đồng phẳng. Dựng tất cả các mặt phẳng chứa 3 trong p điểm đó. Hỏi:

a) Có bao nhiêu mặt phẳng khác nhau? b) Chúng tạo ra bao nhiêu tứ diện?

ĐS: a) $C_p^3 - C_q^3 + 1$. b) $C_p^4 - C_q^4$.

Bài 11: Cho p điểm trong đó có q điểm cùng nằm trên 1 đường tròn, ngoài ra không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu:

a) Đường tròn, mỗi đường đi qua ba điểm?

b) Tứ diện với các đỉnh thuộc p điểm đó?

ĐS: a) $C_p^3 - C_q^3 + 1$. b) $C_p^4 - C_q^4$.

Bài 5: Nhị thức Newton

I. Công thức khai triển nhị thức Newton: *Với mọi n∈N và với mọi cặp số a, b ta có:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

II. Tính chất:

1) Số các số hạng của khai triển bằng n + 1

2) Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n

3) Số hạng tổng quát (thứ k+1) có dạng: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ *(k =0, 1, 2, …, n)*

4) Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

5) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

** Nhận xét: Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì ta sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn:*

$(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^n \quad \Rightarrow \quad C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n C_n^n \quad \Rightarrow \quad C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

Ví dụ 1: a) Khai triển nhị thức: $(2x + 5)^5$

b) Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $p(x) = (x+1)^2 + (x+1)^3 + (x+1)^4 + (x+1)^5$

ĐS: b) Hệ số của x^3 *trong* $(x+1)^3$ *là:* C_3^0

Hệ số của x^3 *trong* $(x+1)^4$ *là:* C_4^1 *. Hệ số của* x^3 *trong* $(x+1)^5$ *là:* C_5^2

$\Rightarrow$ *Hệ số của* x^3 *trong p(x) là:* $C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 = 15$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng đa thức $A = x^{9999} + x^{8888} + \ldots + x^{1111} + 1$

chia hết cho đa thức $B = x^9 + x^8 + \ldots + x + 1$

ĐS: Ta cần chứng minh (A – B) chia hết cho B.

Ta có: $A - B = (x^{9999} - x^9) + (x^{8888} - x^8) + \ldots + (x^{1111} - x)$

$= x^9[(x^{10})^{999} - 1] + x^8[(x^{10})^{888} - 1] + \ldots + x[(x^{10})^{111} - 1] = (x^{10} - 1).Q$

$= (x-1)(x^9 + x^8 + \ldots + x + 1).Q$

$\Rightarrow$ *(A–B) chia hết cho B* $\Rightarrow$ *A chia hết cho B.*

Bài tập

Dạng 1: Xác định các hệ số trong khai triển nhị thức Newton

Bài 1: Tìm hệ số của số hạng chứa M trong khai triển của nhị thức, với:

a) $(x-3)^9$; $M=x^4$ b) $(2x-1)^{12}$; $M=x^5$ c) $(2-x)^{15}$; $M=x^9$

d) $(1-3x)^{11}$; $M=x^6$ e) $(3x-x^2)^{12}$; $M=x^{15}$ f) $(2-5x)^{13}$; $M=x^7$

g) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$; $M=x^{11}$ h) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{12}$; $M=x^3$ i) $\left(y-\frac{2}{y}\right)^{14}$; $M=y^2$

k) $(2x-3y)^{17}$; $M=x^8y^9$ l) $(x^3+xy)^{15}$; $M=x^{25}y^{10}$ m) $(2x+3y)^{25}$; $M=x^{12}y^{13}$

ĐS: a) b) c) d) e) f) g) h) i) k) l) m)

Bài 2: Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển của nhị thức:

a) $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^{10}$ b) $\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{12}$ c) $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{5}$ d) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{6}$

e) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ f) $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{10}$ g) $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ h) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

ĐS: a) 45 b) 495 c) –10 d) 15 e) –8064 f) 210 g) h)

Bài 3: Khai triển đa thức *P(x)* dưới dạng: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Xác định hệ số a_k:

a) $P(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+\ldots+(1+x)^{14}$; a_9?

b) $P(x)=(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\ldots+20(1+x)^{20}$; a_{15}?

c) $P(x)=(x-2)^{80}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{80}x^{80}$; a_{78}?

d) $P(x)=(3+x)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{50}x^{50}$; a_{46}?

e) $P(x)=(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\ldots+(1+x)^{30}$; a_3?

ĐS: a) $a_9=3003$ *b)* $a_{15}=400995$ *c)* $a_{78}=12640$ *d)* $a_{46}=18654300$

Bài 4: Trong khai triển $(x+y+z)^n$, tìm số hạng chứa $x^k.y^m$ $(k, m < n)$

ĐS: Trước hết tìm tất cả số hạng chứa x^k.

Ta có: $(x+y+z)^n=\left[x+\left(y+z\right)\right]^n=\ldots+C_n^kx^k\left(y+z\right)^{n-k}+\ldots$

mà $(y+z)^{n-k}=\ldots+C_{n-k}^my^mz^{n-k-m}+\ldots$

$\Rightarrow$ số hạng chứa $x^k.y^m$ là: $C_n^k.C_{n-k}^mx^ky^mz^{n-k-m}$

Bài 5: Tìm hệ số của số hạng chứa M trong khai triển của nhị thức, với:

a) $(1-x+x^2)^{10}$; $M=x^6$ b) $(1+x+2x^2)^{10}$; $M=x^{17}$

c) $(x^2+x-1)^5$; $M=x^3$ d) $(1+x^2-x^3)^8$; $M=x^8$

e) $(1+x+x^2+x^3)^{10}$; $M=x^5$ f) $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$; $M=x^8$

Bài 6:

a) Cho biết trong khai triển $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$ tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ hai, thứ

ba bằng 11. Tìm hệ số của x^2.

b) Cho biết trong khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$, tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ hai, thứ ba là 46. Tìm hạng tử không chứa *x*.

c) Cho biết tổng của 3 hệ số của 3 số hạng đầu tiên trong khai triển $\left(x^2-\frac{2}{3}\right)^n$ là 97. Tìm hạng tử của khai triển chứa x^4.

d) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết rằng:

$$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1.$$

e) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $(2+x)^n$, biết rằng:

$$3^0C_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=2048$$

ĐS: a) $n=4, C_4^2=6$ *b) n = 9 ; 84* *c) n = 8;* $1120x^4$ *d) n = 10;* $210x^{26}$

e) n = 11; $22x^{10}$

Bài 7: a) Tìm số hạng không chứa căn thức trong khai triển của nhị thức: $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$

b) Tìm số mũ *n* của biểu thức $\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{12}}\right)^n$. Biết tỉ số giữa các hệ số của số hạng thứ 5 và thứ 3 trong khai triển của nhị thức đó là 7:2. Tìm số hạng thứ 6?

c) Tìm số hạng thứ 6 của khai triển $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^{15}$.

d) Tìm số hạng chứa a^7 trong khai triển $\left(\frac{3}{64}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$.

e) Tìm số hạng giữa của khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$.

f) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của nhị thức: $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$.

g) Tìm hạng tử độc lập với x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$.

ĐS: a) $C_5^2.3.2=60$ *b)* $n=9\Rightarrow T_6=C_9^5\left(\sqrt{b}\right)^4.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}\right)^5=\frac{126}{b\sqrt[3]{b^2}}$ *c)* $T_6=C_{15}^5.$

d) $924a^7.2^{-30}$. *e)* $T_{16}=C_{30}^{15}.x^{30}.y^{15}$. *f) 495.* *g) 1820.*

Bài 8: Trong khai triển của nhị thức: $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, tìm các số hạng chứa a, b với luỹ thừa giống nhau?

ĐS: Ta có: $T_{k+1}=C_{21}^k.\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}.\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^k=C_{21}^k.a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}.b^{\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6}}$

$\Rightarrow \frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}=\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6} \Rightarrow k=9$. *Vậy số hạng cần tìm là:* $T_{10} = C_{21}^{9}.a^{\frac{5}{2}}.b^{\frac{5}{2}}$

Bài 9: Số hạng nào chứa *x* với số mũ tự nhiên trong khai triển sau:

a) $(\sqrt[4]{x}+x)^{10}$. b) $\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$.

ĐS: a) $C_{10}^{2}x, C_{10}^{6}x^{7}, C_{10}^{10}x^{10}$. b) $C_{13}^{0}x^{13}, C_{13}^{3}x^{9}, C_{13}^{6}x^{5}, C_{13}^{9}x$.

Bài 10: a) Tìm số hạng của khai triển $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{9}$ là một số nguyên.

b) Tìm số hạng hữu tỉ của khai triển $(\sqrt{3}-\sqrt{15})^{6}$.

c) Xác định các số hạng hữu tỉ của khai triển $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7})^{36}$.

d) Có bao nhiêu hạng tử nguyên của khai triển $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$.

ĐS: a) $T_4=4536, T_{10}=8$. b) $T_1=27, T_3=2005, T_5=10125, T_7=3375$.

c) T_7, T_{22}, T_{37}. d) 32 số hạng

Bài 11: a) Tìm số hạng thứ ba của khai triển $\left(\sqrt[13]{a}+\frac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^{n}$ nếu $C_n^3 : C_n^2 = 4:1$.

b) Trong khai triển $(1+x)^n$ theo lũy thừa tăng của *x*, cho biết : $\begin{cases} T_3 = 4T_5 \\ T_4 = \frac{40}{3}T_6 \end{cases}$. Tìm *n* và *x*?

c) Trong khai triển $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a^4}\right)^{n}$ cho biết hiệu số giữa hệ số của hạng tử thứ ba và thứ hai là 44. Tìm *n*.

ĐS: a) $n=14, T_3=91\sqrt[13]{a^{51}}$. *b)* $n=6, x=\pm\frac{1}{2}$. *c) n = 11*

Dạng 2 : Áp dụng khai triển nhị thức Newton để chứng minh đẳng thức tổ hợp

Bài 1: Tính các tổng sau (*sử dụng trực tiếp khai triển* $(a+b)^n$):

a) $S=C_6^0+C_6^1+\ldots+C_6^6$ *HD: Sử dụng:* $(1+x)^6$*, với x = 1*

b) $S=C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+\ldots+2^5C_5^5$ *HD: Sử dụng:* $(1+x)^5$*, với x = 2*

c) $S=C_{2010}^0+C_{2010}^1+C_{2010}^2+\ldots+C_{2010}^{2010}$ *HD: Sử dụng:* $(1+x)^{2010}$*, với x = 1*

d) $S=C_{2010}^0+2C_{2010}^1+2^2C_{2010}^2+\ldots+2^{2010}C_{2010}^{2010}$ *HD: Sử dụng:* $(1+x)^{2010}$*, với x = 2*

e) $S=C_{11}^6+C_{11}^7+C_{11}^8+C_{11}^9+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}$ *HD: Sử dụng:* $(1+x)^{11}$*, với x = 1*

f) $S=3^{16}C_{16}^0-3^{15}C_{16}^1+3^{14}C_{16}^2-\ldots+C_{16}^{16}$ *HD: Sử dụng:* $(x-1)^{16}$*, với x = 3*

g) $S=3^{17}C_{17}^0+4^1.3^{16}.C_{17}^1+\ldots+4^{17}C_{17}^{17}$ *HD: Sử dụng:* $(3x+4)^{17}$*, với x = 1*

Bài 2: Tính các tổng sau (*sử dụng trực tiếp khai triển* $(a+b)^n$):

a) $S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$. *HD: Sử dụng:* $(1+x)^n$, *với x = 1*

b) $S_1 = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n}$ *HD: Sử dụng:* $(1-x)^{2n}$, *với x = 1*

$S_2 = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1}$

c) $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^3 + ... + 3^nC_n^n$ *HD: Sử dụng:* $(1+x)^n$, *với x = 3*

d) $S = C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + ... + 6^nC_n^n$ *HD: Sử dụng:* $(1+x)^n$, *với x = 6*

e) $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + 2^nC_n^n$ *HD: Sử dụng:* $(1+x)^n$, *với x = 2*

Bài 3: Chứng minh các hệ thức sau (*sử dụng trực tiếp khai triển* $(a+b)^n$):

a) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}$ *HD:* $(1-x)^{2n}$, *với x = 1*

b) $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n} = 4^n$ *HD:* $(1+x)^{2n}$, *với x = 1*

c) $1 - 10.C_{2n}^1 + 10^2.C_{2n}^2 - 10^3.C_{2n}^3 + ... - 10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = 81^n$. *HD:* $(1-x)^{2n}$, *với x = 10*

d) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^4 3^4 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1}.(2^{2n}+1)$ *HD:* $(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$, *với x = 3*

e) $S = C_{2004}^0 + 2^2C_{2004}^2 + 2^4C_{2004}^4 + ... + 2^{2004}C_{2004}^{2004} = \dfrac{3^{2004}+1}{2}$

HD: $(1+x)^{2004} + (1-x)^{2004}$, *với x = 2*

Bài 4: Dùng đẳng thức $(1+x)^m.(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$, chứng minh rằng:

a) $C_m^0.C_n^k + C_m^1.C_n^{k-1} + C_m^2.C_n^{k-2} + ... + C_m^m.C_n^{k-m} = C_{m+n}^k$, $m \le k \le n$.

b) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

c) $C_n^0.C_n^k + C_n^1.C_n^{k+1} + C_n^2.C_n^{k+2} + ... + C_n^{n-k}.C_n^n = \dfrac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!}$

Bài 5: Tính giá trị các biểu thức A, B bằng cách tính A + B, A – B:

a) A = $2^{2n}C_{2n}^0 + 2^{2n-2}C_{2n}^2 + ... + 2^0C_{2n}^{2n}$ B = $2^{2n-1}C_{2n}^1 + 2^{2n-3}C_{2n}^3 + ... + 2^1C_{2n}^{2n-1}$

b) A = $2^nC_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + ...$ B = $2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + .2^{n-5}C_n^5 + ...$

HD:

a) Khai triển $(2x+1)^{2n}$, *với* $x = 1 \Rightarrow A + B = 3^{2n} = 9^n$; $(2x-1)^{2n}$, *với* $x = 1 \Rightarrow A - B = 1$

Từ đó suy ra: $A = \dfrac{1}{2}(9^n+1)$, $B = \dfrac{1}{2}(9^n-1)$

b) Khai triển $(2x+1)^n$, *với* $x = 1 \Rightarrow A + B = 3^n$; $(2x-1)^n$, *với* $x = 1 \Rightarrow A - B = 1$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2}(3^n+1)$, $B = \dfrac{1}{2}(3^n-1)$

Bài 6: Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển thị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số a (a là số tự nhiên) của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

ĐS: a = 210. *(HV hành chính QG, 2000)*

Bài 7: Chứng minh:

a) $S = C_{2002}^0C_{2002}^{2001} + C_{2002}^1C_{2001}^{2000} + ... + C_{2002}^kC_{2002-k}^{2001-k} + ... + C_{2002}^{2001}C_1^0 = 1001.2^{2002}$

HD: a) $C_{2002}^kC_{2002-k}^{2001-k} = ... = 2002.C_{2001}^k \Rightarrow S = 2002\sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^k = 2002.2^{2001} = 1001.2^{2002}$

Dạng 3: Tính tổng các C^k bằng phương pháp đạo hàm và tích phân

1. Để tính các tổng có dạng $\sum_k k.C^k$ hoặc $\sum_k k.(k+1).C^k$ ta lấy đạo hàm cấp 1, cấp 2 nhị thức Niutơn $(1+x)^n$.

2. Để tính các tổng có dạng $\sum_k \frac{C_n^k}{k+1}$ hoặc $\sum_k \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}$ ta lấy tích phân một (hoặc hai) lần nhị thức Niutơn $(1+x)^n$.

Ghi chú: Tuỳ theo các hệ số mà ta lấy nhị thức Niutơn cho thích hợp.

Tổng quát: Muốn chứng minh đẳng thức tổ hợp dạng: $A = k_0C_n^0 + k_1C_n^1 + k_2C_n^2 + ... + k_nC_n^n$ *(1)*

Ta cần nhận dạng biểu thức theo các kiểu hình của các k_p (p=0,1,…,n) và vế trái trong (1).

Sau đó sử dụng khai triển $(a + b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^nb^n$ *(2a)*

hoặc $(x + 1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + ... + C_n^nx^n$ *(2b)*

Loại 1:

Kiểu hình của k_p	k_0 1	k_1 1	k_2 1	……	k_{n-1} 1	k_n 1
$A = 2^n$	*Thay x = 1 vào (2b) hoặc a = b vào (2a)*					

Loại 2:

Kiểu hình của k_p	k_0 1	k_1 –1	k_2 1	……	k_{n-1} $(-1)^{n-1}$	k_n $(-1)^n$
$A = 2^n$	*Thay x = –1 vào (2b) hoặc a =– b=1 vào (2a)*					

Loại 3 :

Kiểu hình của k_p	k_0 n 0	k_1 n–1 1	k_2 n–2 2	……	k_{n-1} 1 $n–1^1$	k_n 0 n
$A = n.2^{n-1}$	*Lấy đạo hàm 2 vế của (2b) hoặc (2a). Thay x = 1*					
	n(n–1) 0	(n–1)(n–2) 0	……	……	0 (n–1)(n–2)	0 n(n–1)
$A = n.(n-1)2^{n-2}$	*Lấy đạo hàm cấp 2 hai vế. Thay x = 1*					

Loại 4:

Kiểu hình của k_p	k_0 $\frac{1}{i+0}$	k_1 $\frac{1}{i+1}$	k_2 $\frac{1}{i+2}$	……	k_{n-1} $\frac{1}{i+(n-1)}$	k_n $\frac{1}{i+n}$
$A = \frac{2^{n-1}-1}{n+1}$	*Lấy* $\int_0^1 (1+x)^n dx$ *và sử dụng khai triển (2b). Thay x = 1*					
	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	……	$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$	$\frac{(-1)^n}{n+1}$
$A = \frac{1}{n+1}$	*Lấy* $\int_0^1 (1-x)^n dx$. *Thay x = –1*					
	$\frac{1}{1}.2^1$	$-\frac{1}{2}.2^2$	$\frac{1}{3}.2^3$	……	……	$\frac{1}{n}.2^n$
$A = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$	*Lấy* $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$. *Sử dụng khai triển. Thay x = 1*					

Bài 1: Tính các tổng sau (*sử dụng đạo hàm của khai triển* $(a+b)^n$):

a) $S = C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 3C_{2010}^2 + ... + 2011C_{2010}^{2010}$ *HD: Lấy đạo hàm:* $(1+x)^{2011}$, *với x = 1*

ĐS:

Bài 2: Chứng minh các hệ thức sau (*sử dụng đạo hàm của khai triển* $(a+b)^n$):

a) $S = 1.C_n^1 + 2.C_n^2 + ... + n.C_n^n = n.2^{n-1}$ *HD:* $\left[(1+x)^n\right]'$, *với x = 1*

b) $S = 2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + ... + n(n-1).C_n^n = n.(n-1)2^{n-2}$ *HD:* $\left[(1+x)^n\right]''$, *với x = 1*

c) $S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n^2C_n^n = n(n+1).2^{n-2}$ *HD:* $k^2C_n^k = \left[k(k-1)+k\right]C_n^k$

d) $S = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + ... + nC_n^n = n.4^{n-1}$ *HD:* $\left[(3+x)^n\right]'$, *với x = 1*

Bài 3: Chứng minh các hệ thức sau (*sử dụng tích phân của khai triển* $(a+b)^n$):

a) $S = 2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$ *HD:* $S = \int_0^2 (1+x)^n dx$

b) $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ *HD:* $S = \int_0^1 (1+x)^n dx$

c) $S = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - ... + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$ *HD:* $S = \int_0^1 (1-x)^n dx$

d) $S = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - ... + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$ *HD:* $S = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$

e) $S = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + ... + \frac{1}{2(n+1)}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{2(n+1)}$ *HD:* $S = \int_0^1 x(1+x^2)^n dx$

f) $S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^2-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$ *HD:* $S = \int_1^2 (1+x)^n dx$

Bài 4: Tính $I = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ ($n \in N$). Từ đó chứng minh:

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + ... + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n+1)}$$

HD: Xét $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, *với mọi* $n \in Z^+$

Đặt $\begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2nx(1-x^2)^{n-1}dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow I_n = x(1-x^2)^n\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx = -2n\int_0^1 (1-x^2)^n dx + 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx$

$= -2n.I_n + 2n.I_{n-1}$

$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n(2n-2)...4.2}{(2n+1)(2n-1)...5.3}I_0$ *với* $I_0 = \int_0^1 dx = 1$

Bài 5: Với $n \in N$ chứng minh rằng:

$$2.C_n^0 - \frac{1}{2}.2^2.C_n^1 + \frac{1}{3}.2^3.C_n^2 - ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}.2^{n+1}.C_n^n = \frac{1}{n+1}\left[1 + (-1)^n\right]$$

ĐS: Xét khai triển Niutơn: $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x - ... + (-1)^n C_n^n x^n$

- Lấy tích phân hai vế trên đoạn $\left[0; 2\right]$ ta được:

$$\int_0^2 (1-x)^n.dx = \int_0^2 \left[C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ... + (-1)^n C_n^n x^n\right]dx$$

$$= \left[C_n^0 x - \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 - ... + \frac{(-1)^n}{n+1}.C_n^n x^{n+1}\right]\Bigg|_0^2$$

$$= 2.C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1.2^2 + \frac{1}{3}C_n^2.2^3 - ... + \frac{(-1)^n}{n+1}.C_n^n.2^{n-1} \quad (1)$$

- Mặt khác, ta có: $\int_0^2 (1-x)^n.dx = -\int_1^{-1} u^n.du$ (với u = 1 – x, du = -dx)

$$= \int_{-1}^1 u^n.du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\right]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{n+1}.\left[1 - (-1)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[1 - (-1).(-1)^n\right] = \frac{1}{n+1}.\left[1 + (-1)^n\right] \quad (2)$$

- So sánh (1) và (2) ta có (đpcm).

Bài 6: Cho $f(x) = (1+x)^n$, $n \in N$, $n \geq 2$.

a) Tính f′(1).

b) Chứng minh rằng: $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + 4.3.C_n^4 + ... + n(n-1).C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$.

ĐS: a) $n(n-1)2^{n-2}$. *(ĐH An ninh, Cảnh sát, 1998)*

Bài 7: Cho $(x-2)^{100} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{100} x^{100}$.

a) Tính a_{97}. b) Tính $S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{100}$.

c) Tính $M = a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 100a_{100}$. *(ĐH Hàng Hải, 1998)*

ĐS: a) -1293600. b) 1. c) -100.

Bài 8: Chứng minh rằng:

a) $2^{n-1}.C_n^1 + 2^{n-1}.C_n^2 + 3.2^{n-3}.C_n^3 + 4.2^{n-4}.C_n^4 + ... + n.C_n^n = n.3^{n-1}$.

(ĐH Kinh tế Quốc dân Hà Nội, 2000)

b) $C_n^1.3^{n-1} + 2.C_n^2.3^{n-2} + 3.C_n^3.3^{n-3} + ... + nC_n^n = n.4^{n-1}$.

(ĐH Sư phạm Thành phố.HCM, 2001)

c) $n.4^{n-1}.C_n^0 - (n-1).4^{n-2}.C_n^1 + (n-2).4^{n-3}.C_n^2 - ... + (-1)^{n-1}.C_n^{n-1} =$

$= C_n^1 + 4C_n^2 + ... + n.2^{n-1}.C_n^n$. *(ĐH Hàng hải, 1997)*

Bài 9: Tính các tổng sau:

a) $S = C_n^1 - 2.C_n^2 + 3.C_n^3 - 4.C_4^4 + ... + (-1)^{n-1} n.C_n^n$. *(ĐH BK Hà Nội, 1999)*

b) $S = C_{2000}^0 + 2.C_{2000}^1 + 3.C_{2000}^2 + ... + 2001C_{2000}^{2000}$

ĐS: a) 0. b) 2002.2^{1999}.

Bài 10: a) Tính $I = \int_0^1 (1+x)^n.dx$, $(n \in N)$

b) Chứng minh rằng: $1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

(ĐH Kiến trúc Hà Nội, 1999; Sư phạm Thành phố.HCM, 2000)

Bài 11: a) Tính $I=\int_0^1 x(1-x^2)^n dx,\ n\in N$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^2-...+\frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n=\frac{1}{2n+2}$

(ĐH Luật 1997, Bách khoa Hà Nội 1997)

Bài 12: a) Tính $I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n dx,\ n\in N$

b) Chứng minh rằng: $C_n^0-\frac{1}{3}.C_n^1+\frac{1}{5}.C_n^2-...+\frac{(-1)^n}{2n+1}.C_n^n=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}...\frac{2n}{2n+1}$.

(ĐHTCKT Hà Nội, QGTp.HCM 1997)

Bài 13: Tính các tổng sau:

a) $S=\frac{2^6}{1}.C_6^0+\frac{2^5}{2}.C_6^1+\frac{2^4}{3}.C_6^2+\frac{2^3}{4}.C_6^3+\frac{2^2}{5}.C_6^4+\frac{2^1}{6}.C_6^5+\frac{1}{7}C_6^6$.

(ĐH Dân lập Duy Tân, 2001)

b) $S=C_n^0+\frac{1}{2}.C_n^1.2+\frac{1}{3}.C_n^2.2^2+\frac{1}{4}.C_n^3.2^3+...+\frac{1}{n+1}.C_n^n.2^n$. *(ĐH Đà Nẵng, 2001)*

c) $\frac{1}{2}.C_{19}^0-\frac{1}{3}.C_{19}^1+\frac{1}{4}.C_{19}^2-...-\frac{1}{21}.C_{19}^{19}$. *(ĐH Nông nghiệp, 1999)*

d) $3C_{2005}^0+\frac{3^2}{2}.C_{2005}^1+\frac{3^3}{3}.C_{2005}^2+...+\frac{3^{2006}}{2006}.C_{2005}^{2005}$

ĐS: a) $\frac{3^7-2^7}{7}$. b) $\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$. c) $\frac{1}{420}$. d) $\frac{4^{2006}-1}{2006}$.

Dạng 4: Áp dụng khai triển nhị thức Newton để chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^nb^n \quad (1)$$

Ví dụ 1: Từ công thức (1), cho a = 1 ta được:

$$(1+b)^n=1+nb+\frac{n(n-1)}{2}b^2+...+b^n \quad (2)$$

Nếu b là 1 số không âm thì $(n+1)$ số hạng ở vế phải của (2) đều là những số không âm, do đó có thể bỏ đi một số số hạng nào đó ở vế phải ta sẽ được các bất đẳng thức. Chẳng hạn:

$(1+b)^n\ge 1+nb$ (BĐT Becnuli)

$(1+b)^n\ge 1+nb+\frac{n(n-1)}{2}b^2$

$(1+b)^n\ge 1+nb^{n-1}+b^n$

Ví dụ 2: Từ (2), nếu $b=\frac{1}{n}$ ($n>1$) thì: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1.\frac{1}{n} + C_n^2.\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n.\frac{1}{n^n}$

Để ý: $C_n^k.\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!}\left[\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right] < \frac{1}{k!} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

Ví dụ 3: Viết nhị thức Newton theo 2 cách sau:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n$; $(b+a)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 b^{n-1} a + \ldots + C_n^n a^n$

Cộng theo từng vế của 2 đẳng thức trên ta có:

$2(a+b)^n = C_n^0(a^n+b^n) + C_n^1(a^{n-1}b + b^{n-1}a) + \ldots + C_n^n(a^n+b^n)$

Dễ thấy với a, b≥ 0, i ≤ n thì:

$(a^{n-i} - b^{n-i}).(a^i - b^i) \ge 0 \Rightarrow a^n + b^n \ge a^{n-i}b^i + a^i b^{n-i}$

Do đó: $2(a+b)^n \le C_n^0(a^n+b^n) + C_n^1(a^n+b^n) + \ldots + C_n^n(a^n+b^n) = 2^n.(a^n+b^n)$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$$

Bài 1. Với $-1 \le x \le 1$, chứng minh: $2^n \ge (1-x)^n + (1+x)^n$ $(n \in N^*)$

HD: Ta thấy $2^n = (1-x+1+x)^n = [(1-x)+(1+x)]^n$.

Khai triển nhị thức Newton ở vế phải, ta có:

$2^n = C_n^0(1-x)^n + C_n^1(1-x)^{n-1}(1+x) + \ldots + C_n^n(1+x)^n$

Vì $-1 \le x \le 1$ *nên* $1-x \ge 0$, $1+x \ge 0$

$\Rightarrow$ $2^n \ge C_n^0(1-x)^n + C_n^n(1+x)^n$ $\Rightarrow$ $2^n \ge (1-x)^n + (1+x)^n$

Bài 2. Cho $x_1 \ge x_2 \ge 0$, $y_1 \ge y_2 \ge 0$, $n \in N^*$. Chứng minh :

$(x_1+y_1)^n + (x_2+y_2)^n \ge (x_1+y_2)^n + (x_2+y_1)^n$

HD: Vì $x_1 \ge x_2 \ge 0$ *nên* $x_1^m \ge x_2^m$ $(m \in N)$

$y_1 \ge y_2 \ge 0$ *nên* $y_1^k \ge y_2^k$ $(k \in N)$

Do đó : $(x_1^m - x_2^m).(y_1^k - y_2^k) \ge 0$ *hay* $x_1^m y_1^k + x_2^m y_2^k \ge x_1^m y_2^k + x_2^m y_1^k$

Lấy $m = n-k$, $n \ge k \ge 0$, *ta được:* $x_1^{n-k}y_1^k + x_2^{n-k}y_2^k \ge x_1^{n-k}y_2^k + x_2^{n-k}y_1^k$ (3)

Từ (3) cho k lần lượt từ 0,1,2,…,n ta được (n+1) BĐT. Sau đó nhân cả 2 vế của từng BĐT tương ứng với C_n^k*, ta có :*

$C_n^0(x_1^n + x_2^n) = C_n^0(x_1^n + x_2^n)$

$C_n^1(x_1^{n-1}y_1 + x_2^{n-1}y_2) \ge C_n^1(x_1^{n-1}y_2 + x_2^{n-1}y_1)$

…………………………………………….

$C_n^n(y_1^n + y_2^n) = C_n^n(y_1^n + y_2^n)$

Cộng vế theo vế, rồi sử dụng nhị thức Newton, ta được :

$(x_1+y_1)^n + (x_2+y_2)^n \ge (x_1+y_2)^n + (x_2+y_1)^n$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ *hoặc* $y_1 = y_2$

Bài 3. Chứng minh rằng nếu $x_k, y_k \ge 0$ (k=1,2,…,n) thì

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+y_k\right)^n \ge m\left[\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} x_k} + \sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} y_k}\right]^n$$

HD: Vì $x_k, y_k \ge 0$ *nên theo BĐT Côsi ta có:* $\sum_{k=1}^{m} x_k^{n-j}y_k^j \ge m\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} x_k^{n-j}y_k^j}$

Cho j = 0,1,2,…,n ta được (n+1) BĐT. Với mỗi BĐT ứng với j ta nhân cả 2 vế với C_n^j*. Sau*

đó cộng các BĐT đó vế theo vế, rồi áp dụng nhị thức Newton, ta được đpcm.

Bài 4. Cho $n \in Z, n \geq 3$. Chứng minh rằng:

a) $n! > 2^{n-1}$. b) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} < 3$. c) $n^{n+1} > (n+1)^n$

Bài 5. a) Cho a, b > 0, a + b = 2. Chứng minh rằng: $a^n + b^n \geq 2$, với $n \in Z, n \geq 1$.

b) Cho $a, b \geq 0$; n nguyên dương. Chứng minh rằng: $\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$.

c) Cho $|x| < 1$ n nguyên dương. Chứng minh rằng: $(1-x)^n + (1+x)^n \leq 2^n$.

Bài 6. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ b) $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, n \geq 2$ c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} < 8, n \geq 2$.

Bài 7. Cho $n \in Z, n \geq 2$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{C_{1997}^1}+\frac{1}{C_{1998}^2}+...+\frac{1}{C_{1997+n}^{n+1}} < \frac{1}{1995}$. b) $\frac{1}{2\sqrt{n}} < A_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

c) $\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} < C_{2n}^n < \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$ d) $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C_{100}^{50} < \frac{2^{100}}{10}$.

Bài 8. a) Cho $k, n \in Z; 0 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng:

$C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \leq \left(C_{2n}^n\right)^2$ *(ĐH Y dược Tp.HCM, 1998, 2001).*

b) Cho $k \in Z, 0 \leq k \leq 2000$. Chứng minh rằng:

$C_{2001}^k + C_{2001}^{k+1} \leq C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001}$ *(ĐHQG Hà Nội, 2000, Khối A)*

c) Cho $n \in N, n \geq 2$. Chứng minh rằng: $C_n^0.C_n^1.C_n^2...C_n^n \leq \left(\frac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}$

d) Cho $n \in N, n \geq 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+\sqrt{C_n^3}+...+\sqrt{C_n^n} \leq \sqrt{n(2^n-1)}$.

Bài 6: Một số bài toán liên quan đến Tổ hợp & Nhị thức Newton

Dạng 1: Toán chia hết

Nếu a chia cho b có số dư là r thì a = bq + r
nên $a^n = (bq + r)^n = b^n q^n + nb^{n-1}q^{n-1}r + \ldots + nbqr^{n-1} + r^n$
Do đó a^n *và* r^n *có cùng số dư khi chia cho b. Tức là:* $a^n \equiv r^n \pmod b$
Vậy nếu $a \equiv r \pmod b$ *thì* $a^n \equiv r^n \pmod b$

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $\forall n \in Z^+$, ta có:

a) $4^n + 15n - 1 \,\vdots\, 9$ b) $16^n - 15n - 1 \,\vdots\, 225$

HD: a) Ta có $4^n = (3+1)^n = 3^n + n.3^{n-1} + \ldots + 3n + 1 \equiv 3n + 1 \pmod 9$
(vì $3^k \,\vdots\, 9,\ \forall k \ge 2$*)*

$4^n + 15n - 1 \equiv 3n + 1 + 15n - 1 \pmod 9 = 18n \pmod 9$

Vậy $4^n + 15n - 1 \,\vdots\, 9$

b) $16^n = (1 + 15)^n = 1 + n.15 + \frac{n(n-1)}{2}.15^2 + \ldots + n.15^{n-1} + 15^n$

$\equiv 1 + 15n \pmod{15^2}$

Do đó: $16^n - 15n - 1 \equiv 1 + 15n - 15n - 1 \equiv 0 \pmod{225}$

Vậy $16^n - 15n - 1 \,\vdots\, 225$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với $\forall n \in Z^+$, ta có: $2^{6n+1} + 3^{6n+1} + 5^{6n} + 1 \,\vdots\, 7$

HD: $2^{6n+1} + 3^{6n+1} + 5^{6n+1} + 1 = 2(2^6)^n + 3(3^6)^n + (5^6)^n + 1$

$= 2.64^n + 3.729^n + 15625^n + 1$

$= 2[(7.9 + 1)^n - 1] + 3[(7.104 + 1)^n - 1] + [(7.2232 + 1)^n - 1] + 7$

Do đó với mọi số tự nhiên p và q thì:

$(7p+1)^q - 1 = [(7p+1)-1].[(7p+1)^{q-1} + \ldots + (7p+1) + 1]$

nên biểu thức đã cho luôn chia hết cho 7.

Dạng 2: Tìm hệ số của x^m trong khai triển $(a+bx^p+cx^q)^n$

B1: Viết số hạng tổng quát của khai triển theo $(bx^p + cx^q)^k$

B2: Khai triển nhị thức $(bx^p + cx^q)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (bx^p)^{k-i}.(cx^q)^i$

B3: $T_k = a^{n-k}.\sum_{i=0}^{k} C_n^k.C_k^i.b^{k-i}c^i x^{pk-pi+qi}$

B4: Cho $pk - pi + qi = m \Rightarrow$ *chọn k, i*

Ví dụ: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển: $[1 + x^2(1-x)]^8$

HD: Số hạng thứ k+1 trong khai triển: $T_{k+1} = C_8^k \left(x^2(1-x)\right)^k = C_8^k x^{2k}(1-x)^k$

$= C_8^k x^{2k} \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i x^i = C_8^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i x^{2k+i}$ $(0 \le i \le k \le 8)$

Theo đề bài: $2k + i = 8 \Rightarrow$ *Chọn (k=3; i=2) hoặc (k=4; i=0)*

Vậy hệ số cần tìm là: $C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0$

Bài 1. a) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển p(x) = $\left(1+2x-\frac{1}{x^2}\right)^9$

b) Tìm hệ số của số hạng chứa $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ trong khai triển p(x) = $\left(1-2x+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^7$

ĐS: a)

Bài 2. Khai triển $f(x)=(1+x+x^2+x^3)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{15}x^{15}$.

a) Tính hệ số a_{10}. b) Tính tổng $A=a_0+a_1+a_2+...+a_{15}$.

c) Tính tổng $B=a_0-a_1+a_2-...-a_{15}$.

ĐS: a) 10 b) 1024. c) 0.

Bài 3. a) Khai triển $P(x)=(1+x+x^2)^{10}$ ta được:

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_1x^{19}+a_{20}x^{20}$. Tính hệ số a_{19}.

b) Tìm hệ số của $x^6y^5z^4$ trong khai triển $P=(2x-5y+z)^{15}$.

c) Tìm số hạng không chứa x khi khai triển $P(x)=\left(1+2x-\frac{1}{x^2}\right)^9$.

d) Tìm hệ số của số hạng chứa $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ khi khai triển $P(x)=\left(1-2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^7$.

ĐS: a) 10 b) $-126^2.10^6$. c) 1 ; 1008 ; 20160 ; 5376. d) 840.

Dạng 3: Tìm hệ số a_k lớn nhất trong khai triển nhị thức Newton

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$.

- *Xét 3 hệ số tổng quát liên tiếp:*
  - *Hệ số của số hạng thứ k + 1 là* a_k $(k=0, 1, 2, ... , n)$
  - *Hệ số của số hạng thứ k + 2 là* a_{k+1}.
  - *Hệ số của số hạng thứ k là* a_{k-1}.
- *Hệ số* a_k *lớn nhất khi:* $\begin{cases} a_k > a_{k-1} \\ a_k > a_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < k < \beta \\ k \in N \end{cases} \Rightarrow k \Rightarrow T_{k+1} \Rightarrow a_k = ...$

Lưu ý: Cần phân biệt giữa hệ số và số hạng.

Ví dụ: Khai triển thị thức $(1+2x)^{12}$ và viết dưới dạng $a_0+a_1x+ax^2+...+a_{12}x^{12}$. Tìm phần tử lớn nhất của tập hợp $\{a_0, a_1, a_2,..., a_{12}\}$.

- Ta có : $(1+2x)^{12}=\sum_{K=0}^{12}C_{12}^k(2x)^k.1^{12-k}=\sum_{K=0}^{12}C_{12}^k2^k.x^k$

  Hệ số của số hạng thứ k + 1 là $a_k=C_{12}^k.2^k$ $(k=0, 1, 2,..., 12)$

- Hệ số a_k lớn nhất khi: $a_{k-1}<a_k$ và $a_k>a_{Kk+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{12}^{k}.2^{k} > C_{12}^{k-1}.2^{k-1} \\ C_{12}^{k}.2^{k} > C_{12}^{k+1}.2^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12!2k}{k!(12-k)!} > \dfrac{12!2^{k-1}}{(k-1)!(13-k)!} \\ \dfrac{12!2^{k}}{k!(12-k)!} > \dfrac{12!2^{k+1}}{(k+1)!(13-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26-2k > k \\ 24-2k < k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{23}{3} < k < \frac{26}{3} \Rightarrow k = 8 \quad (\text{vì } k \in N).$$

Bài 1. a) Xác định số *n* trong khai triển $(x+2)^n$, biết số hạng thứ 11 có hệ số lớn nhất.

b) Tìm số nguyên dương bé nhất *n* sao cho trong khai triển $(1+x)^n$ có hai hệ số liên tiếp có tỷ số là $\frac{7}{15}$.

c) Tìm giá trị của *n* trong khai triển $\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\right)^n$, cho biết số hạng thứ 9 có hệ số lớn nhất.

d) Tìm số hạng lớn nhất của khai triển $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{100}$.

e) Khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành $a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_{10}x^{10}$. Hãy tính hệ số a_k lớn nhất $(0 \le k \le 10)$.

ĐS: a) $n = 15$ b) $n = 21$. c) $n = 12$. d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} C_{100}^{50}$. e) $\frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^{7}$.

Dạng 4: Các bài toán khác

Bài 1. Xét khai triển $\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^m$ (m ≥ 3). Biết số hạng thứ 6 là 21 và các hệ số của các số hạng thứ 2, 3, 4 của khai triển trên là các số hạng thứ 1, 3, 5 của 1 cấp số cộng. Tính giá trị của x.

HD : Gọi a_1, a_3, a_5 là các số hạng thứ 1, 3, 5 của cấp số cộng.

Theo giả thiết : $C_m^1 = a_1$; $C_m^2 = a_3$; $C_m^3 = a_5$

Theo tính chất CSC : $2a_3 = a_1 + a_5 \Leftrightarrow \frac{2m(m+1)}{1.2} = m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$

$\Leftrightarrow m^2 - 9m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = 7;\ m = 2$ *(loại)*

$\Rightarrow T_6 = 21 \Leftrightarrow C_7^5 2^{(x-2)\lg 3}.2^{\lg(10-3^x)} = 21 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 10.3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow x=0;\ x=2$

Bài 2. Tìm số tự nhiên k sao cho các số: $C_{14}^{k}, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$ lập thành 1 cấp số cộng.

ĐS: k = 4; k = 8

Bài 3. Cho $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_{3n}^{3k}$. Hãy tính $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{S_n}$.

HD:

Ta có: $C_{3n}^{3k} = C_{3n-1}^{3k} + C_{3n-1}^{3k-1} = C_{3n-2}^{3k} + C_{3n-2}^{3k-1} + C_{3n-2}^{3k-1} + C_{3n-2}^{3k-2} > C_{3n-2}^{3k} + C_{3n-2}^{3k-1} + C_{3n-2}^{3k-2}$

$\Rightarrow S_n > \sum_{k=0}^{n}\left(C_{3n-2}^{3k} + C_{3n-2}^{3k-1} + C_{3n-2}^{3k-2}\right) = 2^{3n-2}$ *(1)*

Mặt khác: $S_n < \sum_{k=0}^{3n} C_{3n}^{k} = 2^{3n}$ *(2)*

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt[3n]{2^{3n-2}} < \sqrt[3n]{S_n} < 2$

mà $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{2^{3n-2}} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{S_n} = 2$

Bài 7: Xác suất

I. Biến cố và xác suất

1. Biến cố

- *Không gian mẫu Ω: là tập các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.*
- *Biến cố A: là tập các kết quả của phép thử làm xảy ra A. $A \subset \Omega$.*
- *Biến cố không: $\varnothing$* • *Biến cố chắc chắn: Ω*
- *Biến cố đối của A: $\overline{A} = \Omega \setminus A$*
- *Hợp hai biến cố: $A \cup B$* • *Giao hai biến cố: $A \cap B$ (hoặc A.B)*
- *Hai biến cố xung khắc: $A \cap B = \varnothing$*
- *Hai biến cố độc lập: nếu việc xảy ra biến cố này không ảnh hưởng đến việc xảy ra biến cố kia.*

2. Xác suất

- *Xác suất của biến cố: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$*
- $0 \le P(A) \le 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$
- *Qui tắc cộng: Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*

Mở rộng: A, B bất kì: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- *Qui tắc nhân: Nếu A, B độc lập thì $P(A.B) = P(A).\ P(B)$*

Bài 1: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của biến cố:
a) Tổng hai mặt xuất hiện bằng 8.
b) Tích hai mặt xuất hiện là số lẻ.
c) Tích hai mặt xuất hiện là số chẵn.

ĐS: a) $n(\Omega) = 36$. $n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \dfrac{5}{36}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{3}{4}$

Bài 2: Một lớp học có 25 học sinh, trong đó gồm có 15 em học khá môn Toán, 17 em học khá môn Văn.
a) Tính xác suất để chọn được 2 em học khá cả 2 môn.
b) Tính xác suất để chọn được 3 em học khá môn Toán nhưng không khá môn Văn.

ĐS: a) $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 15 + 17 - 25 = 7 \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{C_7^2}{25}$ b) $\dfrac{C_8^3}{25}$

Bài 3: Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất của biến cố:
a) Tổng hai mặt xuất hiện bằng 7. b) Các mặt xuất hiện có số chấm bằng nhau.

ĐS: a) $\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{1}{6}$

Bài 4: Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ chỉ khác nhau về màu. Lấy ngẫu nhiên một viên bi, rồi lấy tiếp một viên nữa. Tính xác suất của biến cố lần thứ hai được một viên bi xanh.

ĐS: $\dfrac{5}{8}$

Bài 5: Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ chỉ khác nhau về màu. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để được ít nhất 3 viên bi xanh.

ĐS: $\dfrac{1}{2}$

Bài 6: Hai người đi săn độc lập với nhau và cùng bắn một con thú. Xác suất bắn trúng của người thứ nhất là $\frac{3}{5}$, của người thứ hai là $\frac{1}{2}$. Tính xác suất để con thú bị bắn trúng.

ĐS: $\frac{4}{5}$

Bài 7: Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) Lần thứ nhất xuất hiện mặt 6 chấm. b) Lần thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm.
c) Ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm. d) Không lần nào xuất hiện mặt 6 chấm.

ĐS: a) $\frac{1}{6}$ *b)* $\frac{1}{6}$ *c)* $\frac{11}{36}$ *d)* $\frac{25}{36}$

Bài 8: Gieo đồng thời bốn đồng xu cân đối đồng chất. Tính xác suất của biến cố:

a) Cả 4 đồng xu đều ngửa.
b) Có đúng 3 đồng xu lật ngửa.
c) Có ít nhất hai đồng xu lật ngửa.

ĐS: a) $\frac{1}{16}$ *b)* $\frac{1}{4}$ *c)* $\frac{11}{16}$

Bài 9: Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng.Tính xác suất để lấy được:

a) ít nhất 2 bóng tốt b) ít nhất 1 bóng tốt.

Bài 10: Một lớp học gồm 20 học sinh trong đó có 6 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn và 4 học sinh giỏi cả 2 môn. GVCN chọn ra 2 em. Tính xác suất để 2 em đó là học sinh giỏi.

Bài 11: Một hộp có 20 quả cầu giống nhau, trong đó có 12 quả cầu trắng và 8 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 3 quả. Tính xác suất để trong 3 quả chọn ra có ít nhất một quả màu đen.

Bài 12: Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. GVCN chọn ra 2 em đi thi văn nghệ. Tính xác suất để 2 em đó khác phái.

Bài 13: Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để :

a) Cả 3 em đều là học sinh giỏi b) Có ít nhất 1 học sinh giỏi
c) Không có học sinh trung bình.

Bài 14: Cho 7 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau lấy từ 7 số trên. Lấy ngẫu nhiên 1 số thuộc X. Tính xác suất để:

a) Số đó là số lẻ.
b) Số đó chia hết cho 5
c) Số đó chia hết cho 9.

II. Biến ngẫu nhiên rời rạc

1. Biến ngẫu nhiên rời rạc

- $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- $P(X=x_k) = p_k$ $\qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

2. Kì vọng (giá trị trung bình)

- $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

3. Phương sai và độ lệch chuẩn

- $V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$ $\qquad$ • $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Bài 1: Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền. Mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn của người thứ nhất là 0,8. Tính xác suất làm bàn của người thứ hai, biết rằng xác suất để cả hai người cùng làm bàn là 0,56 và xác suất để bị thủng lưới ít nhất một lần là 0,94.

Bài 2: Một cặp vợ chồng có 3 người con. Gọi X là số lần sinh con trai. Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Bài 3: Một hộp đựng 6 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Gọi X là số lần lấy được bi đỏ. Lập bảng phân phối của biến ngẫu nhiên X.

Bài 4: Cho bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X:

X	1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

Tìm kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Bài 5: Một hộp đựng 5 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên. Gọi X là số bi đỏ lấy ra. Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Bài 6: Hai xạ thủ độc lập cùng bắn vào 1 bia. Mỗi người bắn 1 viên đạn. Xác suất để xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là 0,7. Xác suất để xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là 0,8. Gọi X là số đạn bắn trúng bia. Tính kỳ vọng, phương sai của X.

Ôn tập

Bài 1: Một cơ quan có 4 cổng ra vào.

a) Hỏi một người khách có thể chọn bao nhiêu cách ra vào cơ quan đó?

b) Có thể chọn bao nhiêu cách vào ra cơ quan đó bằng 2 cổng khác nhau (cổng vào khác cổng ra)?

ĐS: *a)* 16 *b)* 12

Bài 2: Có 10 môn học buổi sáng và 7 môn học buổi chiều.

a) Hỏi có mấy khả năng học sinh lựa chọn để buổi sáng chỉ học 1 môn và buổi chiều chỉ học 1 môn?

b) Hỏi có mấy khả năng học sinh lựa chọn để buổi sáng chỉ học 1 môn và buổi chiều không học môn nào?

ĐS:

Bài 3: Một người có 6 cái áo, 5 cái quần và 3 đôi giày. Trong đó có 3 áo sọc và 3 áo trắng, 2 quần đen, 2 đôi giày đen. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn mặc áo – quần – giày, nếu:

a) Chọn áo, quần, giày nào cũng được?

b) Nếu chọn áo sọc thì với quần nào, giày nào cũng được; còn nếu chọn áo trắng thì chỉ mặc với quần đen và đi giày đen?

ĐS:

Bài 4: Một nhóm học sinh gồm có 30 em giỏi Toán và 20 em giỏi Văn. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh sao cho có ít nhất 3 em giỏi Toán?

ĐS:

Bài 5: Một đồn cảnh sát có 10 người. Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người ở địa điểm B, còn 5 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công?

ĐS:

Bài 6: Trong số 10^7 số điện thoại 7 chữ số thì những số có 7 chữ số khác nhau chiếm tỉ lệ bao nhiêu?

ĐS:

Bài 7: Hội đồng quản trị của một công ty gồm 15 người. Từ hội đồng đó bầu cử ra một chủ tịch, một phó chủ tịch và 2 ủy viên kiểm tra. Hỏi có bao nhiêu cách?

ĐS: *16380*

Bài 8: Trong bình hoa có 10 bông hồng đỏ và 5 bông hồng trắng. Có bao nhiêu cách lấy ra từ bình hoa 4 bông hồng cùng màu?

ĐS: *215*

Bài 9: Một bộ sách gồm 30 tập. Hỏi có bao nhiêu cách sắp bộ sách đó lên kệ sách dài sao cho tập 1 và tập 2 không đứng kề nhau.

ĐS: $30! - 2 . 29! = 28 . 29!$

Bài 10: Hai nhân viên bưu điện cần phải chuyển 10 lá thư đến 10 địa chỉ. Hỏi họ có bao nhiêu cách phân công công việc đó?

ĐS: 2^{10}

Bài 11: Cần phát 12 đề thi gồm 6 đề A và 6 đề B cho 12 học sinh, mỗi học sinh đều được 1 đề. Có bao nhiêu cách sắp xếp các học sinh ấy thành hai dãy mỗi dãy 6 học sinh sao cho các học sinh ngồi kề nhau thì không cùng đề với nhau còn các học sinh ngồi trước cùng đề với học sinh ngồi ngay phía sau.

ĐS: $2 . 6! 6!$

Bài 12: Có thể chia 12 quyển sách khác nhau cho 4 đứa trẻ theo bao nhiêu cách biết rằng:

a) Mỗi đứa trẻ được 3 quyển sách?

b) Hai đứa lớn nhất được 4 quyển sách mỗi đứa và hai đứa bé nhất được 2 quyển sách mỗi đứa?

ĐS: *a) 369600;* *b) 207900.*

Bài 13: Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 5 người khách:

a) Vào 5 ghế thành 1 dãy.
b) Vào 5 ghế chung quanh một bàn tròn, nếu không có sự phân biệt giữa các ghế này?
ĐS: a) 120 b) 24

Bài 14: Một dãy ghế dành cho 3 nam và 2 nữ. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi nếu:
a) Họ ngồi thế nào cũng được?
b) Nam ngồi kề nhau, nữ ngồi kề nhau?
c) Chỉ có nữ ngồi kề nhau?
ĐS: a) 120; b) 24; c) 48.

Bài 15: Xếp 6 người ngồi vào 1 dãy 6 ghế, có bao nhiêu cách nếu:
a) Có 3 người trong họ muốn ngồi kề nhau?
b) Có 2 người trong họ không muốn ngồi kề nhau?
c) Có 3 người trong họ không muốn ngồi kề nhau đôi một?
ĐS: a) 144; b) 480; c) 144.

Bài 16: Có bao nhiêu cách xếp 5 người gồm 3 nam và 2 nữ vào một hàng ghế gồm 8 ghế nếu:
a) Họ ngồi thế nào cũng được?
b) Họ ngồi kề nhau?
c) 3 nam ngồi kề nhau, 2 nữ ngồi kề nhau và giữa hai nhóm này có ít nhất 1 ghế trống?
ĐS: a) 6720; b) 480; c) 144.

Bài 17: Một hàng ghế gồm 10 chiếc ghế. Có bao nhiêu cách sắp xếp một đôi vợ chồng ngồi vào các ghế đó nếu:
a) Họ ngồi ghế nào cũng được?
b) Họ ngồi kề nhau?
c) Vợ ngồi bên phải chồng?
d) Họ ngồi cách nhau một ghế?
ĐS: a) 90; b) 18; c) 9; d) 16.

Bài 18: Có bao nhiêu cách xếp 5 người vào một cái bàn có 5 chỗ ngồi sao cho A và B ngồi cạnh nhau nếu?
a) Cái bàn là bàn dài?
b) Cái bàn là bàn tròn không phân biệt các chỗ?
c) Cái bàn là bàn tròn có đánh số (có phân biệt chỗ)?
ĐS: a) 48; b) 12; c) 60.

Bài 19: Lớp có 12 nam trong đó có An và có 8 nữ trong đó có Bình. Có bao nhiêu cách cử ra 5 người đi dự trại hè quốc tế sao cho phải có ít nhất hai nam, ít nhất hai nữ, hơn nữa An và Bình không đồng thời được cử đi?
ĐS: 9240

Bài 20: Một lớp học có 15 học sinh ưu tú trong đó có An và Bình. Có bao nhiêu cách cử 4 học sinh ưu tú đi du học ở 4 nước khác nhau, mỗi nước một người, trong 4 người đó có An và Bình.
ĐS: $4.3.A_{13}^2 = 4.3.13.12 = 1872$

Bài 21: Có 5 học sinh trong đó có An và Bình. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ lên một đoàn tàu gồm 8 toa nếu:
a) 5 người lên cùng một toa? b) 5 người lên 5 toa đầu?
c) 5 người lên 5 toa khác nhau? d) An và Bình lên cùng toa đầu?
e) An và Bình lên cùng một toa?
f) An và Bình lên cùng một toa, ngoài ra không có người nào khác lên toa này?
ĐS: a) 7; b) 120; c) 6720 d) 512; e) 4096; f) 343.

Bài 22: Giám đốc một công ty muốn chọn một nhóm 5 người vào hội đồng tư vấn. Trong công ty có 12 người hội đủ điều kiện để được chọn, trong đó có hai cặp vợ chồng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:
a) Hội đồng này có đúng một cặp vợ chồng?
b) Hội đồng này không thể gồm cả vợ lẫn chồng (nếu có)?

ĐS: a) 112; b) 560.

Bài 23: Cho 5 quả cầu màu trắng có bán kính khác nhau và 5 quả cầu màu xanh có bán kính khác nhau. Người ta muốn xếp 10 quả cầu đó vào một hàng 10 chỗ cho trước.

a) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau?

b) Có bao nhiêu cách xếp sao cho hai quả cầu đứng cạnh nhau thì phải khác nhau?

c) Có bao nhiêu cách xếp sao cho 5 quả cầu trắng đứng kề nhau?

ĐS: a) 3628800; b) 28800; c) 86400.

Bài 24: Cho 1 thập giác lồi:

a) Tìm số đường chéo?

b) Tìm số tam giác có đỉnh là đỉnh của thập giác?

c) Trong các tam giác trên có bao nhiêu tam giác có ít nhất một cạnh là cạnh của thập giác? Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của thập giác?

ĐS:

Bài 25: a) Cho trước 15 điểm trong mặt phẳng sao cho 3 điểm bất kỳ trong số đó không cùng nằm trên 1 đường thẳng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua 2 điểm trong số đó?

b) Cho trước 25 điểm trong không gian sao cho 4 điểm bất kỳ trong số đó không cùng nằm trong 1 mặt phẳng. Có bao nhiêu tam giác nối 3 điểm bất kỳ trong số đó? Có bao nhiêu tứ diện nối 4 điểm bất kỳ trong số đó?

ĐS: a) 105; b) 2300; 12650.

Bài 26: Một họ *n* đường thẳng song song cắt một họ *m* đường thẳng song song. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành?

ĐS: $\dfrac{mn(m-1)(n-1)}{4}$

Bài 27: Cho một đa giác lồi *n* đỉnh ($n \geq 4$)

a) Tính số đường chéo của đa giác này?

b) Biết rằng 3 đường chéo không đi qua cùng một đỉnh thì không đồng quy, hãy tính số các giao điểm không phải là đỉnh của các đường chéo ấy?

ĐS: a) $\dfrac{n(n-3)}{2}$; b) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

Bài 28: Cho tam giác ABC. Xét tập hợp đường thẳng gồm 4 đường thẳng song song với AB, 5 đường thẳng song song với BC và 6 đường thẳng song song với CA. Hỏi các đường thẳng này tạo được:

a) Bao nhiêu tam giác?

b) Bao nhiêu hình thang mà không phải là hình bình hành?

ĐS: a) 120; b) 720.

Bài 29: Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau được lập nên từ các số 1, 2, 3, 4, 5 và:

a) Bắt đầu với chữ số 3?

b) Không bắt đầu với chữ số 5?

c) Bắt đầu với số 54?

d) Không bắt đầu với số 543?

ĐS:

Bài 30: Có 100000 chiếc vé số được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi có bao nhiêu vé số gồm 5 chữ số khác nhau?

ĐS: A_{10}^{5}.

Bài 31: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau?

ĐS: 312.

Bài 32: Có bao nhiêu số gồm *n* chữ số, trong đó các chữ số chỉ là 1, 2, 3, sao cho mỗi chữ số có mặt ít nhất một lần trong mỗi số đó?

ĐS:

Bài 33: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi sao cho tất cả các chữ số đều khác không và có mặt đồng thời các chữ số 2, 4, 5.

ĐS: 1800.

Bài 34: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số trong đó

a) Có một chữ số 1?

b) Có chữ số 1 và các chữ số đều khác nhau?

ĐS: a) 1225; b) 750.

Bài 35: a) Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau.

b) Tính tổng các số ở câu a)

ĐS: a) 648; b) 355680.

Bài 36: Có bao nhiêu số lớn hơn 2000 với các chữ số khác nhau từng đôi lấy từ tập X = {0, 1, 2, 3, 4}

ĐS: 168.

Bài 37: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số biết rằng hai chữ số đứng kề nhau phải khác nhau?

ĐS: 59049

Bài 38: Với các chữ số 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu

a) Số tự nhiên lớn hơn 400 và nhỏ hơn 600?

b) Số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau từng đôi một và chia hết cho 4?

ĐS: a) 16; b) 6.

Bài 39: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau từng đôi và:

a) Các số này lớn hơn 300000?

b) Các số này lớn hơn 300000 và chia hết cho 5?

c) Các số này lớn hơn 350000?

ĐS: a) 360; b) 120; c) 264.

Bài 40: Với 6 chữ số 2, 3, 5, 6, 7, 8 người ta muốn lập những số gồm bốn chữ số khác nhau.

a) Có bao nhiêu số nhỏ hơn 5000?

b) Có bao nhiêu số chẵn nhỏ hơn 7000?

ĐS: a) 120; b) 120.

Bài 41: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi một và khác 0 biết rằng tổng của 3 chữ số này bằng 8.

ĐS: 12.

Bài 42: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau từng đôi một biết rằng tổng 3 chữ số này bằng 12.

ĐS: 54.

Bài 43: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 người ta muốn lập các số gồm 8 chữ số khác nhau từng đôi. Có bao nhiêu số trong đó

a) Chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần?

b) Chữ số 1 có mặt hai lần, chữ số 2 có mặt hai lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?

ĐS: a) 6720 HD: A_8^5; b)10080 *HD*: $A_8^4.C_4^2.1 = C_8^2.C_6^2.4!$.

Bài 44: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, có thể lập được bao nhiêu số có năm chữ số khác nhau từng đôi trong đó:

a) Phải có mặt chữ số 0? b) Phải có mặt chữ số 6?

c) Phải có mặt hai chữ số 0 và 6?

ĐS: a) $4.A_6^4 = 1440$; b) $6.A_6^4 - 5.A_5^4 = 1560$; c) $1.4.A_5^3 + 5.A_4^2.A_4^2 = 960$

Bài 45: Cho S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Có bao nhiêu tập con A của S trong mỗi trường hợp sau:

a) A có 5 phần tử.

b) A có 5 phần tử và phần tử bé nhất của A là 3.

c) A có 5 phần tử và phần tử bé nhất của A bé hơn hay bằng 3.

ĐS: a) 252; b) 35; c) 231.

Bài 46: a) Có bao nhiêu tập con của {1, 2, ..., 11} chứa ít nhất một số chẵn?

b) Có bao nhiêu tập con của {1, 2, ..., 12} chứa ít nhất một số chẵn?

ĐS: a) $2^{11} - 2^6$; b) $2^{12} - 2^6$.

Bài 47: Giả sử chỉ có một phần tư số tập con 5 phần tử của {1, 2, ..., *n*} chứa số 7. Hãy tìm *n*.

ĐS: $n = 20$.

Bài 48: Tính giá trị các biểu thức sau:

$A = \dfrac{10!+8!}{8!}$ $\quad B = \dfrac{7!4!}{10!}.\left[\dfrac{8!}{3!5!} - \dfrac{9!}{2!7!}\right]$

$C = \dfrac{A_5^2}{P_2} + \dfrac{A_{10}^5}{7P_3}$ $\quad D = \left(\dfrac{P_5}{A_5^1} + \dfrac{P_1}{A_5^3} + \dfrac{P_3}{A_5^2} + \dfrac{P_2}{A_5^1}\right).A_5^2$

ĐS:

Bài 49: Giải các phương trình:

a) $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2 \ (x \in N)$ b) $P_{n+5} = 15A_{n+1}^k.P_{n+1-k}$

c) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$ d) $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \dfrac{30}{7}P_x$

ĐS: *a) $x = 5$ c) $x = 6$ v $x = 11$; d) $x = 7$;*

Bài 50: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$ b) $\dfrac{C_x^{y-1}}{3} = \dfrac{C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y+1}}{5} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5}$

c) $\dfrac{A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}}{10} = \dfrac{A_x^{y-1}}{2} = \dfrac{C_x^{y-1}}{1}$

ĐS: a) x = 5, y = 7; b) x = 7, y = 3; c) x = 7, y = 3.

Bài 51: Chứng minh rằng:

a) $(n!)^2 > n^n \quad (n \in N, n \geq 2)$

b) $C_n^0.C_n^1...C_n^n \leq \left(\dfrac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$ $(n \in N, n \geq 2)$; khi nào dấu "=" xảy ra)

Bài 52: Chứng minh các đẳng thức sau: (*dùng công thức Pascal*)

a) $P_k.A_{n+1}^2.A_{n+3}^2.A_{n+5}^2 = nk!A_{n+5}^5 \quad (k \leq n;\ k,\ n \in N)$

b) $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k \quad (4 \leq k \leq n)$

c) $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$

d) $C_{21}^{10} = C_9^9 + C_{10}^9 + ... + C_{20}^9$

Bài 53: Chứng minh các đẳng thức sau: (*dùng công thức Pascal*)

a) $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$ b) $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$

c) $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}$ d) $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_{n-p}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-p}^{m+1}$

e) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^k C_n^k = (-1)^k C_{n-1}^k$ f) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

ĐS: *f.* $(1+x)^n(x+1)^n = (1+x)^{2n}$. *So sánh hệ số của x^n ở cả 2 vế.*

Bài 54: Tính các tổng sau:

a) $A = C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + ... + 2^k C_n^{2k} + ...$ $B = C_n^1 + 2C_n^3 + 4C_n^5 + ... + 2^k C_n^{2k+1} + ...$

b) $S = 1.C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + ... k^2 C_n^k + ... + n^2 C_n^n$

c) $(1+x)^n - C_n^1 x(1+x)^{n-1} + C_n^2 x^2 (1+x)^{n-2} + ... + (-1)^n C_n^n x^n$

d) $\frac{1}{0!n!} + \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} + ... + \frac{1}{k!(n-k)!} + ... + \frac{1}{n!0!}$ (*chú ý:* $\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{C_n^k}{n!}$)

e) $\frac{1}{0!n!} - \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!0!}$

<u>ĐS</u>: *a) Khai triển các biểu thức* $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ *và* $\left(1-\sqrt{2}\right)^n$

b) Đạo hàm các hàm số: f(x) = (1 + x)^n *và g(x) = x(1 + x)*^{n}.

d) $\frac{2^n}{n!}$; *e) 0.*

Bài 55: CMR: $C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}$ (với k+3 ≥ n ; n, k∈N) là 3 số hạng liên tiếp của 1 cấp số cộng.

Bài 56: Viết khai triển của biểu thức $(3x-1)^{16}$, từ đó chứng minh rằng :

$$3^{16}.C_{16}^0 - 3^{15}.C_{16}^1 + 3^{14}.C_{16}^2 - ... + C_{16}^{16} = 2^{16}$$

Bài 57: Chứng minh các hệ thức sau: (*dùng đạo hàm*)

a) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = (n+2).2^{n-1}$

b) $2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$

c) $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + n^2 C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$

Bài 58: Chứng minh rằng: (*dùng tích phân*)

a) $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$

b) $C_{2n-1}^0 - \frac{C_{2n-1}^1.2}{1+1} + \frac{C_{2n-1}^2.2^2}{1+2} + ... + \frac{(-1)^n C_{2n-1}^{2n-1}.2^{2n-1}}{1+(n+1)} = 0$

c) $2C_n^0 + \frac{2^2 C_n^1}{2} + \frac{2^3 C_n^2}{3} + \frac{2^4 C_n^3}{4} + ... + \frac{2^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$

Bài 59: Chứng minh: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.C_n^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{(k+1).2^{k+1}} = \frac{2^{2n+2} - 3^{n+1}}{(n+1).2^{n+1}}$

Bài 60: a) Tính $I = \int_0^1 x^2(1+x^3)dx$

b) Chứng minh : $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$

Bài 61: Cho n∈N, chứng minh hệ thức sau:

$$\frac{(1+e)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{2^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k.e^{k+1}$$

Bài 62: Với giá trị nào của x thì số hạng thứ 4 trong khai triển của $(5+2x)^{16}$ lớn hơn số hạng thứ 3 và thứ 5.

<u>ĐS</u>: $\frac{15}{28} < x < \frac{10}{13}$.

Bài 63: Số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^n$ không chứa *x*. Với giá trị nào của *x* thì số hạng đó bằng số hạng thứ 2 trong khai triển $(1+x^3)^{30}$.

ĐS: $x = 2$.

Bài 64: a) Dùng khai triển của P = $(a+b+c)^n$, CMR số các hoán vị khác nhau của *m* chữ *a*, *n* chữ *b*, *p* chữ *c* là: $N=\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$

b) Áp dụng: Tính hệ số của đơn thức $x^6y^5z^4$ trong khai triển của P = $(2x-5y+z)^{15}$.

ĐS:

Bài 65: Xác định hệ số của x^4 trong khai triển của P = $(1+2x+3x^2)^{10}$

ĐS:

Bài 66: Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển, biết:

a) $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$, biết $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$.

b) $\left(2nx+\frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$, biết tổng các hệ số trong khai triển bằng 64.

c) $\left(ax+x^{-\frac{1}{4}}\right)^n$**,** biết tổng các hệ số bậc chẵn trong khai triển bằng 512.

d) $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$**,** biết tổng hệ số của số hạng thứ hai và thứ 3 trong khai triển bằng 25,5.

ĐS: *a)* 792. *b)* 240 *c)* $45a^2$ *d)* $\frac{1547}{1024}$

Bài 67: Tìm giá trị của *x* sao cho trong khai triển của $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$, (*n* là số nguyên dương) có số hạng thứ 3 và thứ 5 có tổng bằng 135, còn các hệ số của ba số hạng cuối của khai triển đó có tổng bằng 22.

ĐS: $x = 2; x = -1$.

Bài 68: Tìm số nguyên dương *n* sao cho trong khai triển của $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)^n$ tỉ số của số hạng thứ 4 và số hạng thứ 3 là $3\sqrt{2}$.

ĐS: $n = 5$.

Bài 69: Tìm giá trị của *x* sao cho trong khai triển của $\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt{x^{-1}}\right)^{12}$ hiệu số giữa số hạng thứ $k+1$ và số hạng thứ *k* bằng 30 còn số mũ của *x* trong số hạng thứ *k* gấp đôi số mũ của *x* trong số hạng thứ $k+1$.

ĐS: $x_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$; $x_2=5\sqrt{5}$.

Bài 70: Với những giá trị nào của *x*, số hạng thứ 3 của khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+x^{\lg\sqrt{x}}\right)^9$ bằng 3600.

ĐS:

Bài 71: Tìm giá trị của số thực *x*, sao cho trong khai triển $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{x^{x-1}}}\right)^n$ tổng các số hạng thứ 3 và thứ 5 là 135, tổng của 3 hạng tử cuối là 22.

ĐS:

Bài 72: Gieo một đồng tiền hai lần, xét biến cố A = " ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp ". Tính $n(\Omega)$ và $n(A)$.

ĐS:

Bài 73: Gieo đồng thời ba con xúc sắc cân đối, đồng chất. Gọi A là biến cố ba mặt không giống nhau. Tính $n(\Omega)$ và $n(A)$.

ĐS:

Bài 74: Gieo một con xúc sắc hai lần. tính xác suất của biến cố:

a) A : " tổng số chấm hai lần gieo bằng 8".

b) B : " tổng số chấm hai lần gieo là một số chia hết cho 9 ".

c) C : " tổng số chấm hai lần gieo là như nhau ".

ĐS:

Bài 75: Gieo một con xúc sắc hai lần. Tính xác suất của biến cố:

a) A : " lần đầu được mặt có số chấm lẻ, lần sau được mặt có số chấm lớn hơn 2 ".

b) B : " một lần được số chấm là chẵn, một lần được số chấm là lẻ ".

ĐS:

Bài 76: Cho 7 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau lấy từ 7 số trên. Lấy ngẫu nhiên 1 số thuộc X. Tính xác suất để:

a) Số đó là số lẻ.

b) Số đó chia hết cho 5

c) Số đó chia hết cho 9.

ĐS:

Bài 77: Một hộp đựng 8 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ, cân đối, đồng chất. Lấy ngẫu nhiên 4 viên. Tính xác suất để được:

a) 4 viên bi màu xanh. b) 4 viên bi màu đỏ.

c) 2 viên bi màu xanh và 2 viên bi màu đỏ.

Bài 78: Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng.Tính xác suất để lấy được:

a) ít nhất 2 bóng tốt b) ít nhất 1 bóng tốt.

ĐS:

Bài 79: Một lớp học gồm 20 học sinh trong đó có 6 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn và 4 học sinh giỏi cả 2 môn. GVCN chọn ra 2 em. Tính xác suất để 2 em đó là học sinh giỏi.

ĐS:

Bài 80: Một hộp có 20 quả cầu giống nhau, trong đó có 12 quả cầu trắng và 8 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 3 quả. Tính xác suất để trong 3 quả chọn ra có ít nhất một quả màu đen.

ĐS:

Bài 81: Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. GVCN chọn ra 2 em đi thi văn nghệ. Tính xác suất để 2 em đó khác phái.

ĐS:

Bài 82: Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để :

a) Cả 3 em đều là học sinh giỏi b) Có ít nhất 1 học sinh giỏi

c) Không có học sinh trung bình.

ĐS:

Đề thi Đại học

Phần 1: Bài toán đếm

Bài 1: (ĐHQG TPHCM khối A đợt 1 1999)
Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
1. Có bao nhiêu tập con X của tập A thoả điều kiện X chứa 1 và không chứa 2.
2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập A và không bắt đầu bởi 123.
ĐS: 1) 64 2) 3348

Bài 2: (ĐHQG TPHCM khối D đợt 1 1999)
Một học sinh có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 2 cuốn sách Toán, 4 cuốn sách Văn và 6 cuốn sách Anh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp tất cả các cuốn sách lên một kệ sách dài, nếu các cuốn sách cùng môn được xếp kề nhau?
ĐS: 207360 cách.

Bài 3: (ĐHQG TPHCM khối AB đợt 2 1999)
Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:
1. Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau.
2. Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.
ĐS: 33177600 cách.

Bài 4: (ĐHQG TPHCM khối D đợt 2 1999)
Cho tập X = {0,1,2,3,4,5,6,7}. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một từ X (chữ số đầu tiên phải khác 0) trong mỗi trường hợp sau:
1. n là số chẵn.
2. Một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1.
ĐS: 1) 3000 2) 2280 số.

Bài 5: (ĐH Huế khối A chuyên ban 1999)
Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả 3 màu?
ĐS: 645.

Bài 6: (ĐH Huế khối D chuyên ban 1999)
Người ta xếp ngẫu nhiên 5 lá phiếu có ghi số thứ tự từ 1 đến 5 cạnh nhau.
1. Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu số chẵn luôn ở cạnh nhau?
2. Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu phân thành hai nhóm chẵn lẻ riêng biệt (chẳng hạn 2, 4, 1, 3, 5)?
ĐS: 1) 48 2) 24.

Bài 7: (ĐH Huế khối RT chuyên ban 1999)
Người ta viết các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lên các tấm phiếu, sau đó xếp thứ tự ngẫu nhiên thành một hàng.
1. Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số được sắp thành?
2. Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số được sắp thành?
ĐS: 1) 288 2) 312.

Bài 8: (HV Ngân hàng TPHCM 1999)
Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có năm chữ số 1 và bốn chữ số còn là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế, nếu:
1. Năm chữ số 1 được xếp kề nhau.
2. Các chữ số được xếp tuỳ ý.
ĐS: 1) 120 2) 3024.

Bài 9: (ĐH Hàng hải 1999)

Có bao nhiêu cách sắp xếp năm bạn học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế dài sao cho:
1. Bạn C ngồi chính giữa.
2. Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế.
ĐS: 1) 24 2) 6.

Bài 10: (HV BCVT 1999)
Hỏi từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và 1.
ĐS: 21840.

Bài 11: (ĐHQG HN khối B 2000)
Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5.
ĐS: 54.

Bài 12: (ĐHQG TPHCM khối A 2000)
Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 5 cuốn sách Văn, 4 cuốn sách Nhạc và 3 cuốn sách Hoạ. Ông muốn lấy ra 6 cuốn và tặng cho 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một cuốn.
1. Giả sử thầy giáo chỉ muốn tặng cho các học sinh trên những cuốn sách thuộc 2 thể loại Văn và Nhạc. Hỏi có bao nhiêu cách tặng?
2. Giả sử thầy giáo muốn rằng sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?
ĐS: 1) 60480 2) 579600.

Bài 13: (ĐH Huế khối A chuyên ban 2000)
Một lớp có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn ra để lập một tốp ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau nếu:
1) phải có ít nhất là 2 nữ.
2) chọn tuỳ ý.
ĐS: 1) $C_{15}^2.C_{30}^4 + C_{15}^3.C_{30}^3 + C_{15}^4.C_{30}^2 + C_{15}^5.C_{30}^1 + C_{15}^6$ *2)* C_{45}^6.

Bài 14: (ĐH Huế khối DRT chuyên ban 2000)
Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho ta có thể lập được:
1. Bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số và bốn chữ số đó khác nhau từng đôi một.
2. Bao nhiêu số chia hết cho 5, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một.
3. Bao nhiêu số chia hết cho 9, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một.
ĐS: 1) 156 2) 36 3) 16.

Bài 15: (ĐH Y HN 2000)
Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lí nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lí. Hỏi có bao nhiêu cách?
ĐS: 90.

Bài 16: (ĐH Cần Thơ khối D 2000)
Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta lập các số mà mỗi số có năm chữ số trong đó các chữ số khác nhau từng đôi một. Hỏi
1. Có bao nhiêu số trong đó phải có mặt chữ số 2.
2. Có bao nhiêu số trong đó phải có mặt hai chữ số 1 và 6.
ĐS: 1) 600 2) 480.

Bài 17: (ĐH Thái Nguyên khối AB 2000)
Một đội văn nghệ có 20 người, trong đó có 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho:
1. Có đúng 2 nam trong 5 người đó.
2. Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5 người đó.
ĐS: 1) 5400 2) 12900.

Bài 18: (ĐH Thái Nguyên khối D 2000)
Từ 3 chữ số 2, 3, 4 có thể tạo ra được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, trong đó có mặt

đủ 3 chữ số trên.
ĐS: 75594.

Bài 19: (ĐH Thái Nguyên khối G 2000)
Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ.
ĐS: 45000.

Bài 20: (ĐH Cần Thơ khối AB 2000)
Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 viên bi vàng có kích thước đôi một khác nhau.
1. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó có đúng 2 viên bi đỏ.
2. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ.
ĐS: 1) 7150 2) 3045.

Bài 21: (ĐH Đà Lạt khối ADV 2000)
Có 5 thẻ trắng và 5 thẻ đen, đánh dấu mỗi loại theo các số 1, 2, 3, 4, 5. Có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các thẻ này thành một hàng sao cho hai thẻ cùng màu không nằm liền nhau.
ĐS: $5!5! + 5!5!$.

Bài 22: (ĐH Sư phạm HN 2 khối A 2000)
Có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6 trong đó các chữ số 1 và 6 đều có mặt 2 lần, các chữ số khác có mặt 1 lần.
ĐS: 10080.

Bài 23: (ĐH Sư phạm Vinh khối ABE 2000)
Có bao nhiêu số khác nhau gồm 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số chẵn.
ĐS: 45.10^5.

Bài 24: (ĐH Sư phạm Vinh khối DGM 2000)
Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.
ĐS: 126.

Bài 25: (HV Kỹ thuật quân sự 2000)
Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày, cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người ở địa điểm B, còn 4 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công?
ĐS: 1260.

Bài 26: (ĐH GTVT 2000)
Một lớp học có 20 học sinh, trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự hội nghị Hội sinh viên của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp.
ĐS: 324.

Bài 27: (HV Quân y 2000)
Xếp 3 viên bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh giống nhau vào một dãy 7 ô trống. Hỏi:
1. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau?
2. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 viên bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 viên bi xanh xếp cạnh nhau?
ĐS: 1) 840 2) 36.

Bài 28: (ĐH Cảnh sát nhân dân khối G CPB 2000)
Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số, chia hết cho 9?
ĐS: 50000.

Bài 29: (ĐH Cảnh sát nhân dân khối G CB 2000)
Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số khác nhau lớn hơn 500000?
ĐS: 57120.

Bài 30: (CĐSP Nha Trang 2000)
Với các số: 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số 0.
ĐS: 180.

Bài 31: (CĐSP Nhà trẻ – Mẫu giáo TƯ I 2000)
Một lớp học sinh mẫu giáo gồm 15 em, trong đó có 9 em nam, 6 em nữ. Cô giáo chủ nhiệm muốn chọn một nhóm 5 em để tham dự trò chơi gồm 3 em nam và 2 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?
ĐS: 1260.

Bài 32: (ĐH An ninh khối D 2001)
Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu số có bảy chữ số từ những chữ số trên, trong đó chữ số 4 có mặt đúng 3 lần, còn các chữ số khác có mạt đúng 1 lần.
ĐS: 720.

Bài 33: (ĐH Cần Thơ 2001)
Một nhóm gồm 10 học sinh, trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh trên thành một hàng dài sao cho 7 học sinh nam phải đứng liền nhau.
ĐS: 120960.

Bài 34: (HV Chính trị quốc gia 2001)
Một đội văn nghệ có 10 người, trong đó có 6 nữ và 4 nam.
1. Có bao nhiêu cách chia đội văn nghệ thành hai nhóm có số người bằng nhau và mỗi nhóm có số nữ như nhau.
2. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 người mà trong đó không có quá 1 nam.
ĐS: 1) 120 2) 66.

Bài 35: (ĐH Giao thông vận tải 2001)
Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4.
ĐS: 13320.

Bài 36: (ĐH Huế khối ABV 2001)
Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần?
ĐS: 8676.

Bài 37: (ĐH Huế khối DHT 2001)
Từ một nhóm học sinh gồm 7 nam và 6 nữ, thầy giáo cần chọn ra 5 em tham dự lễ mittinh tại trường với yêu cầu có cả nam và nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?
ĐS: 1260.

Bài 38: (HV Kỹ thuật quân sự 2001)
Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ có 8 người sao cho ở mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh khá.
ĐS: 3780.

Bài 39: (ĐH Kinh tế quốc dân 2001)
Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 5 chữ số khác nhau và trong đó phải có chữ số 5.
ĐS: 1560.

Bài 40: (HV Ngân hàng TPHCM khối A 2001)
1. Có thể tìm được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau đôi một?
2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau?
ĐS: 1) 648 2) 3000.

Bài 41: (ĐH Ngoại thương TPHCM khối A 2001)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thiết lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?
ĐS: 480.

Bài 42: (ĐH Nông nghiệp I HN khối A 2001)
Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để có đúng 2 học sinh nam đứng xen kẽ 3 học sinh nữ. (Khi đổi chỗ 2 học sinh bất kì cho nhau

ta được một cách xếp mới).
ĐS: 21600.

Bài 43: (HV Quan hệ quốc tế 2001)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 9 chữ số mà chữ số 9 đứng ở vị trí chính giữa?
ĐS: 40320.

Bài 44: (ĐH Quốc gia TPHCM 2001)
1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1.
2. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.
ĐS: 1) 33600 2) 11340.

Bài 45: (ĐHSP HN II 2001)
Tính tổng tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được lập từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8.
ĐS: 3732960.

Bài 46: (ĐHSP TPHCM khối DTM 2001)
Cho A là một hợp có 20 phần tử.
1. Có bao nhiêu tập hợp con của A?
2. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử là số chẵn?
ĐS: 1) 2^{20} *2)* $2^{19}-1$.

Bài 47: (ĐH Thái Nguyên khối D 2001)
1. Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.
2. Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 mà các số đó nhỏ hơn số 345.
ĐS: 1) 24 2) 50.

Bài 48: (ĐH Văn Lang 2001)
Một lớp có 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 học sinh để đi làm công tác "Mùa hè xanh". Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 5 học sinh đó phải có ít nhất:
1. Hai học sinh nữ và hai học sinh nam.
2. Một học sinh nữ và một học sinh nam.
ĐS: 1) 10800 b) 15000.

Bài 49: (ĐH Y HN 2001)
Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau và không lớn hơn 789?
ĐS: 171.

Bài 50: (ĐH khối D dự bị 1 2002)
Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn.
ĐS: 41811.

Bài 51: (ĐH khối A 2003 dự bị 2)
Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3.
ĐS: 192.

Bài 52: (ĐH khối B 2003 dự bị 1)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số và thoả mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 chữ số cuối một đơn vị.
ĐS: 108.

Bài 53: (ĐH khối B 2003 dự bị 2)

Từ một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam cần chọn ra 6 em trong đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?
ĐS: 462.

Bài 54: (ĐH khối D 2003 dự bị 1)
Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau?
ĐS: 90720.

Bài 55: (CĐ Sư phạm khối A 2002)
1. Tìm số giao điểm tối đa của:
a) 10 đường thẳng phân biệt.
b) 6 đường tròn phân biệt.
2. Từ kết quả của câu 1) hãy suy ra số giao điểm tối đa của tập hợp các đường nói trên.
ĐS: 1a) 45 1b) 30 2) 195.

Bài 56: (CĐ Sư phạm khối A 2002 dự bị)
Cho đa giác lồi *n* cạnh. Xác định *n* để đa giác có số đường chéo gấp đôi số cạnh.
ĐS: $n = 7$.

Bài 57: (CĐ Xây dựng số 3 – 2002)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 245.
ĐS: 20.

Bài 58: (CĐ Sư phạm Quảng Ngãi 2002)
Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 5, 9 có thể lập được bao nhiêu số lẻ, mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau.
ĐS: 54.

Bài 59: (ĐH khối B 2004)
Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.
ĐS: 56875.

Bài 60: (ĐH khối B 2005)
Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.
ĐS: 207900.

Bài 61: (ĐH khối A 2005 dự bị 1)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn bằng 8.
ĐS: 1440.

Bài 62: (ĐH khối B 2005 dự bị 1)
Một đội văn nghệ có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 8 người, biết rằng trong nhóm đó phải có ít nhất 3 nữ.
ĐS: 3690.

Bài 63: (ĐH khối B 2005 dự bị 2)
Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có 2 chữ số 1, 5.
ĐS: 1200.

Bài 64: (ĐH khối D 2006)
Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?
ĐS: 225.

Bài 65: (CĐ GTVT III khối A 2006)

Từ một nhóm gồm 15 học sinh khối A, 10 học sinh khối B, 5 học sinh khối C, chọn ra 15 học sinh sao cho có ít nhất 5 học sinh khối A và đúng 2 học sinh khối C. Tính số cách chọn.

ĐS: 51861950.

Bài 66: (CĐ Tài chính – Hải quan khối A 2006)

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, trong đó chữ số 0 có mặt đúng 2 lần, chữ số 1 có mặt đúng 1 lần và hai chữ số còn lại phân biệt?

ĐS: 1008.

Bài 67: (CĐ Xây dựng số 3 khối A 2006)

Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số đó.

ĐS: 2210.

Bài 68: (CĐBC Hoa Sen khối D 2006)

Cho 2 đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau. Trên đường thẳng d_1 cho 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 cho 8 điểm phân biệt. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà 3 đỉnh của mỗi tam giác lấy từ 18 điểm đã cho.

ĐS: 640.

Bài 69: (ĐH 2012B)

Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

ĐS: $P = \frac{11075}{12650} = \frac{443}{506}$.

Bài 70: (ĐH 2013A)

Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

ĐS: $P = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

Bài 71: (ĐH 2013B)

Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi, tính xác suất để 2 viên bi được lấy ra cùng màu.

ĐS: $P = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$.

Bài 72: ()

ĐS:

Phần 2: Biểu thức tổ hợp

Bài 1: (CĐSP TPHCM 1999)

Tìm số tự nhiên k thoả mãn hệ thức: $C_{14}^{k}+C_{14}^{k+2}=2C_{14}^{k+1}$.

ĐS: $k=4; k=8$.

Bài 2: (ĐHDL Kỹ thuật công nghệ khối D 1999)

Tính tổng: $C_{10}^{6}+C_{10}^{7}+C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}$, trong đó C_{n}^{k} là số tổ hợp chập k của *n* phần tử.

ĐS: 386.

Bài 3: (ĐH Ngoại ngữ HN chuyên ban 1999)

Tìm các số nguyên dương x thoả: $C_{x}^{1}+6C_{x}^{2}+6C_{x}^{3}=9x^{2}-14x$

ĐS: $x=7$.

Bài 4: (ĐH Bách khoa HN 1999)

Tính tổng: S = $C_{n}^{1}-2C_{n}^{2}+3C_{n}^{3}-4C_{n}^{4}+...+(-1)^{n-1}.nC_{n}^{n}$, trong đó *n* là số tự nhiên lớn hơn 2.

ĐS: $S=0$.

Bài 5: (ĐHQG HN khối A 2000)

Chứng minh rằng: $C_{2001}^{k}+C_{2001}^{k+1}\le C_{2001}^{1000}+C_{2001}^{1001}$, (trong đó k nguyên, $0\le k\le 2000$).

HD: Chứng tỏ $C_{2001}^{k}<C_{2001}^{k+1}, k=0,1,2,...,999$.

Bài 6: (ĐHQG HN khối B 2000)

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức sau: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}+\sqrt[4]{x^{3}}\right)^{17}$, $x\ne 0$

ĐS: C_{17}^{8}.

Bài 7: (ĐH Bách khoa HN khối AD 2000)

Giải bất phương trình: $\frac{1}{2}A_{2x}^{2}-A_{x}^{2}\le\frac{6}{x}.C_{x}^{3}+10$

ĐS: $x=3; x=4$.

Bài 8: (ĐHSP HN khối A 2000)

Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{n}$, hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x, biết rằng $C_{n}^{n}+C_{n}^{n-1}+C_{n}^{n-2}=79$.

ĐS: $C_{12}^{7}=792$.

Bài 9: (ĐHSP HN khối BD 2000)

Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số a (a là số tự nhiên) của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

ĐS: $C_{10}^{6}=210$.

Bài 10: (ĐHSP TPHCM khối DE 2000)

Tính tổng: S = $C_{n}^{0}+\frac{1}{2}C_{n}^{1}+\frac{1}{3}C_{n}^{2}+...+\frac{1}{n+1}C_{n}^{n}$

ĐS: $S=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Bài 11: (ĐH Kinh tế quốc dân khối A 2000)

Chứng minh: $2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-4}C_n^4 + ... + nC_n^n = n.3^{n-1}$

HD: Lấy đạo hàm biểu thức $(1+x)^n$*, thay* $x = \dfrac{1}{2}$.

Bài 12: (ĐH Nông nghiệp I khối A 2000)

Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển của $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$.

ĐS:

Bài 13: (ĐH Thuỷ lợi 2000)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \ge 2$, ta luôn có: $\dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \dfrac{1}{A_4^2} + ... + \dfrac{1}{A_n^2} = \dfrac{n-1}{n}$

HD: Dùng phương pháp quy nạp.

Bài 14: (ĐH Thuỷ lợi II 2000)

Cho đa thức $P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + ... + (1+x)^{94}$ có dạng khai triển là:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{14}x^{14}.$$

Hãy tính hệ số a_9.

ĐS: $a_9 = 3003$.

Bài 15: (ĐH Y Dược TPHCM 2000)

Với *n* là số nguyên dương, hãy chứng minh các hệ thức sau:

1. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$
2. $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n}$

HD: 1) Xét $(1+x)^n$ *với* $x = 1$ *2) Xét* $(1-x)^{2n}$ *với* $x = 1$.

Bài 16: (ĐH An ninh nhân dân khối DG 2000)

Tính tổng: $S = C_{2000}^0 + 2C_{2000}^1 + 3C_{2000}^2 + ... + 2001C_{2000}^{2000}$

ĐS: $S = \sum_{i=0}^{2000} C_{2000}^i + \sum_{i=1}^{2000} iC_{2000}^i = 1001.2^{2000}$.

Bài 17: (HV Kỹ thuật quân sự 2000)

Khai triển đa thức: $P(x) = (1+2x)^{12}$ thành dạng: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{12}x^{12}$.

Tìm $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$.

ĐS: $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{12}) = a_8 = C_{12}^8.2^8 = 126720$.

Bài 18: (ĐH Cảnh sát nhân dân khối A 2000)

Tính tích phân: $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx \quad (n \in N^*)$

Từ đó chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2}C_n^0 - \dfrac{1}{4}C_n^1 + \dfrac{1}{6}C_n^2 - \dfrac{1}{8}C_n^3 + ... + \dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \dfrac{1}{2(n+1)}$

ĐS: Đặt $t = 1 - x^2 \Rightarrow I = \dfrac{1}{2(n+1)}$.

Bài 19: (CĐ Cảnh sát nhân dân khối A 2000)

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức: $(x+1)^4 + (x+1)^5 + (x+1)^6 + (x+1)^7$.

ĐS: 28.

Bài 20: (ĐH An Ninh khối A 2001)

Tìm các số âm trong dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ với $x_n = \dfrac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \dfrac{143}{4P_n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

ĐS: $x_n < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{19}{2} < n < \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow n = 1; n = 2$

Bài 21: (ĐH An ninh nhân dân khối A 2001)

Chứng minh rằng với *n* là số tự nhiên, $n \ge 2$, ta có: $\dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{A_n^2} = \dfrac{n-1}{n}$.

ĐS: Chú ý: $\dfrac{1}{A_k^2} = \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k-1}$. *Cho* $k = 2, 3, \ldots$ *ta được đpcm.*

Bài 22: (ĐH Bách khoa HN khối AD 2001)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$.

ĐS: $(x = 5; y = 2)$.

Bài 23: (ĐH Dân lập Duy Tân khối A 2001)

1. Tính tích phân: I = $\displaystyle\int_0^1 (x+2)^6 dx$

2. Tính tổng: S = $\dfrac{2^6}{1}C_6^0 + \dfrac{2^5}{2}C_6^1 + \dfrac{2^4}{3}C_6^2 + \dfrac{2^3}{4}C_6^3 + \dfrac{2^2}{5}C_6^4 + \dfrac{2}{6}C_6^5 + \dfrac{1}{7}C_6^6$

ĐS: $S = I = \dfrac{3^7 - 2^7}{7}$.

Bài 24: (ĐH Đà Lạt khối D 2001)

Chứng minh rằng với mọi số x ta có: $x^n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (2x-1)^k$ $(n \in N)$ (*)

HD: Đặt $u = 2x - 1$. *Chứng tỏ VT=VP.*

Bài 25: (ĐH Đà Nẵng khối A 2001)

Với mỗi *n* là số tự nhiên, hãy tính tổng:

$$S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1.2 + \frac{1}{3}C_n^2.2^2 + \frac{1}{4}C_n^3.2^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n.2^n$$

ĐS: $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 (x+1)^n dx = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2(n+1)}$.

Bài 26: (ĐH Hàng hải 2001)

Chứng minh: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + C_{2n}^4.3^4 + \ldots + C_{2n}^{2n}.3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$

HD: Xét $(1+3)^{2n} + (1-3)^{2n}$.

Bài 27: (ĐH Luật TPHCM khối A 2001)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$, ta có:

$$C_n^1.3^{n-1} + 2.C_n^2.3^{n-2} + 3.C_n^3.3^{n-3} + \ldots + n.C_n^n = n.4^{n-1}.$$

HD: Xét $f(x) = (x+3)^n$. *Tính* $f'(x)$ *với* $x = 1$.

Bài 28: (ĐHSP HN khối A 2001)

Trong khai triển của $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_9x^9 + a_{10}x^{10} \quad (a_k \in R)$$

hãy tìm hệ số a_k lớn nhất (0 ≤ k ≤ 10).

ĐS: $a_{k-1} \le a_k \Leftrightarrow k \le \frac{22}{3} \Rightarrow a_7 = \frac{1}{3^{10}}C_{10}^7.2^7$ *là lớn nhất.*

Bài 29: (ĐH Vinh khối AB 2001)

Cho *n* là một số nguyên dương cố định. Chứng minh rằng C_n^k lớn nhất nếu k là số tự nhiên lớn nhất không vượt quá $\frac{n+1}{2}$.

HD: $C_n^k > C_n^{k-1} \Leftrightarrow \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{n+1}{2}$.

Bài 30: (ĐH Vinh khối DTM 2001)

Chứng minh rằng: $C_{2001}^0 + 3^2C_{2001}^2 + 3^4C_{2001}^4 + \ldots + 3^{2000}C_{2001}^{2000} = 2^{2000}(2^{2001}-1)$

HD: Xét $(x+1)^{2001} + (-x+1)^{2001}$ *với* $x = 3$.

Bài 31: (ĐH Y Dược TPHCM 2001)

Cho k và *n* là các số nguyên thoả mãn: 0 ≤ k ≤ *n*. Chứng minh rằng: $C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$.

HD: Đặt $a_k = C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \,(0 \le k \le n)$. *Chứng minh* $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n$.

Bài 32: (ĐH khối A 2002)

Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \ldots + C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

(*n* là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20. Tìm *n* và x.

ĐS: $n = 7; x = 4$.

Bài 33: (ĐH khối B 2002)

Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ (*n* ≥ 2, *n* nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Tìm *n*?

ĐS: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow n = 8$.

Bài 34: (ĐH khối D 2002)

Tìm số nguyên dương *n* sao cho: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n = 243$

ĐS: PT $\Leftrightarrow 3^n = 243 \Leftrightarrow n = 5$.

Bài 35: (ĐH dự bị 2 2002)

Tìm số *n* nguyên dương thoả mãn bất phương trình: $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \le 9n$.

ĐS: $n = 3; n = 4$.

Bài 36: (ĐH dự bị 4 2002)

Giả sử *n* là số nguyên dương và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$.

Biết rằng tồn tại số k nguyên ($1 \le k \le n-1$) sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$.

Hãy tính *n*.

ĐS: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2n+2}{11} \\ k = \frac{3n-8}{11} \end{cases} \Leftrightarrow 3n-8 = 2n+2 \Leftrightarrow n = 10$.

Bài 37: (ĐH dự bị 6 2002)

Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau:

$$(x+1)^{10}.(x+2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \ldots + a_{11}.$$

Hãy tính hệ số a_5.

ĐS: $a_5 = C_{10}^5 + 2C_{10}^4 = 672$.

Bài 38: (ĐH khối A 2003)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$ (*n* nguyên dương, x > 0).

ĐS: $n = 12 \Rightarrow$ *Hệ số của* x^8 *là* $C_{12}^4 = 495$.

Bài 39: (ĐH khối B 2003)

Cho *n* là số nguyên dương. Tính tổng: $S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

ĐS: $S = \int_1^2 (1+x)^n dx = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.

Bài 40: (ĐH khối D 2003)

Với *n* là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm *n* để $a_{3n-3} = 26n$.

ĐS: ta có: $(x^2+1)^n = C_n^0x^{2n} + C_n^1x^{2n-2} + \ldots + C_n^n$; $(x+2)^n = C_n^0x^n + 2C_n^1x^{n-1} + \ldots + 2^nC_n^n$

Kiểm tra với $n = 1; n = 2$ *không thoả đk bài toán.*

Với $n \ge 3$ *thì* $x^{3n-3} = x^{2n}x^{n-3} = x^{2n-2}x^{n-1}$. *Do đó hệ số của* x^{3n-3} *trong khai triển của đa thức* $(x^2+1)^n(x+2)^n$ *là:* $a_{3n-3} = 2^3C_n^0.C_n^3 + 2C_n^1C_n^1 \Leftrightarrow n = 5$.

Bài 41: (ĐH khối D 2003 dự bị 2)

Tìm số tự nhiên *n* thoả mãn: $C_n^2C_n^{n-2} + 2C_n^2C_n^3 + C_n^3C_n^{n-3} = 100$

ĐS: $n = 4$.

Bài 42: (CĐ Xây dựng số 3 – 2002)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương *n* ta đều có:

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n}$$

HD: Xét $(x+1)^{2n}$ *với* $x = -1$.

Bài 43: (CĐ Sư phạm Bến Tre khối A 2002)

1. Giải phương trình: $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

2. Chứng minh rằng: $C_{20}^1 + C_{20}^3 + C_{20}^5 + ... + C_{20}^{17} + C_{20}^{19} = 2^{19}$

ĐS: 1) $x = 2$ *2) Áp dụng* $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ và $C_n^0 = 1$.

Bài 44: (CĐ khối AD 2003)

Chứng minh rằng: $P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + nP_n = P_{n+1} - 1$.

HD: Dùng quy nạp.

Bài 45: (CĐ Giao thông II 2003)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta đều có: $C_n^0 C_n^1 ... C_n^n \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$

HD: Do $C_n^0 = C_n^n = 1$ nên ta có: $C_n^0 C_n^1 ... C_n^n = C_n^1 C_n^2 ... C_n^{n-1}$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $C_n^1 C_n^2 ... C_n^{n-1} \leq \left(\frac{C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$

Áp dụng khai triển $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ với a = b = 1, ta có:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n \Rightarrow C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} = 2^n - 2$$

Suy ra: $C_n^1 C_n^2 ... C_n^{n-1} \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$ (đpcm).

Bài 46: (CĐ Giao thông III 2003)

1. Tính tổng: $S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + ... + (-1)^{n-1} nC_n^n$ $(n > 2)$

2. Tính tổng: $T = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$

biết rằng n là số nguyên dương thoả điều kiện: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

ĐS: 1) Xét $f(x) = (1+x)^n$. $S = f'(-1) = 0$

2) $T = \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$; $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow n = 12 \Rightarrow T = \frac{2^{13} - 1}{13}$.

Bài 47: (CĐ Tài chính kế toán IV 2003)

Chứng minh rằng: $C_2^0 C_{n-2}^k + C_2^1 C_{n-2}^{k-1} + C_2^2 C_{n-2}^{k-2} = C_n^k$ (với n, k $\in Z^+$; $n \geq k + 2$)

HD: Dùng công thức Pascal.

Bài 48: (CĐ Tài chính kế toán IV 2003 dự bị)

Giải bất phương trình: $(n!)^3 C_n^n . C_{2n}^n . C_{3n}^n \leq 720$

ĐS: BPT $\Leftrightarrow (3n)! \leq 720 = 6! \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 2$.

Bài 49: (CĐ Công nghiệp HN 2003)

Cho đa thức: $P(x) = (16x - 15)^{2003}$. Khai triển đa thức đó dưới dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2003} x^{2003}$$

Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2003}$.

ĐS: $S = P(1) = 1$.

Bài 50: (CĐ Khí tượng thuỷ văn khối A 2003)

Tìm số nguyên dương n thoả mãn đẳng thức: $A_n^3 + 2C_n^2 = 16n$.

ĐS: $n = 5$.

Bài 51: (CĐ Nông Lâm 2003)

Tìm hệ số lớn nhất của đa thức trong khai triển nhị thức Newton của: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{15}$.

ĐS: $a_k = \frac{1}{3^{15}}C_{15}^k 2^k$; $a_{k-1} < a_k \Leftrightarrow k < \frac{32}{3} \Rightarrow k = 10 \Rightarrow a_{10} = 3003.\frac{2^{10}}{3^{15}}$.

Bài 52: (CĐ Cộng đồng Tiền Giang 2003)

Hãy khai triển nhị thức Newton $(1 – x)^{2n}$, với n là số nguyên dương. Từ đó chứng minh rằng:

$$1C_{2n}^1 + 3C_{2n}^3 + ... + (2n-1)C_{2n}^{2n-1} = 2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + ... + 2nC_{2n}^{2n}$$

HD: Xét $f(x) = (1-x)^{2n}$. *Từ* $f'(1) = 0 \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 53: (ĐH khối A 2004)

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$.

ĐS: $a_8 = C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0 = 238$.

Bài 54: (ĐH khối D 2004)

Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của: $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$.

ĐS: $C_7^4 = 35$.

Bài 55: (ĐH khối A 2005)

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

ĐS: Xét $f(x) = (1+x)^{2n+1}$. $VT = f'(-2) \Rightarrow n = 1002$.

Bài 56: (ĐH khối D 2005)

Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$.

ĐS: $n = 5 \Rightarrow M = \frac{3}{4}$.

Bài 57: (ĐH khối A 2005 dự bị 2)

Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thoả mãn: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$

ĐS: Xét $f(x) = (1+x)^{2n+1}$. $VT = \frac{1}{2}\left[f(1) - f(-1)\right] \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow$ *hệ số của* x^7 *là* $-C_{10}^7 3^7 2^3$.

Bài 58: (ĐH khối D 2005 dự bị 1)

Tìm $k \in \{0; 1; 2; …; 2005\}$ sao cho C_{2005}^k đạt giá trị lớn nhất.

HD: C_{2005}^k lớn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} C_{2005}^k \ge C_{2005}^{k+1} \\ C_{2005}^k \ge C_{2005}^{k-1} \end{cases} (k \in N) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2005!}{k!(2005-k)!} \ge \frac{2005!}{(k+1)!(2004-k)!} \\ \frac{2005!}{k!(2005-k)!} \ge \frac{2005!}{(k-1)!(2006-k)!} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k+1 \ge 2005-k \\ 2006-k \ge k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge 1002 \\ k \le 1003 \end{cases} \Leftrightarrow 1002 \le k \le 1003, k \in N.$

$\Leftrightarrow$ k = 1002 hoặc k = 1003.

Bài 59: (ĐH khối D 2005 dự bị 2)

Tìm số nguyên $n > 1$ thoả mãn đẳng thức: $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$.

ĐS: $n = 2; n = 3$.

Bài 60: (ĐH khối A 2006)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

ĐS: Từ giả thiết suy ra: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20}$ *(1)*

Vì $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$, $\forall k,\ 0 \le k \le 2n + 1$ *nên:*

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}\right) \quad (2)$$

Từ khai triển nhị thức Newton của $(1 + 1)^{2n+1}$ *suy ra:*

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $2^{2n} = 2^{20} \Leftrightarrow n = 10$.

Ta có: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^{-4})^{10-k}\left(x^7\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$

Hệ số của x^{26} *là* C_{10}^k *với k thoả mãn:* $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy hệ số của x^{26} *là* $C_{10}^6 = 210$.

Bài 61: (ĐH khối B 2006)

Cho tập A gồm *n* phần tử ($n \ge 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1,2,\dots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

ĐS: $C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow n = 18$.

Từ $\frac{C_{18}^{k+1}}{C_{18}^k} > 1 \Leftrightarrow k < 9$, *nên* $C_{18}^1 < C_{18}^2 < ... < C_{18}^9 \Rightarrow C_{18}^9 > C_{18}^{10} > ... > C_{18}^{18}$.

Vậy số tập con gồm *k* phần tử của A là lớn nhất khi và chỉ khi $k = 9$.

Bài 62: (CĐ Bán công Hoa Sen khối A 2006)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \frac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \frac{1}{24} \end{cases}$

ĐS: $(x = 4; y = 8)$.

Bài 63: (CĐ KT–KT Cần Thơ khối AB 2006)

Tìm số tự nhiên *n* sao cho: $\frac{1}{C_4^n} - \frac{1}{C_5^n} = \frac{1}{C_6^n}$

ĐS: $n = 2$.

Bài 64: (CĐ Sư phạm TPHCM khối A 2006)

Tính tổng $S = \frac{1.C_n^0}{A_1^1} + \frac{2.C_n^1}{A_2^1} + \frac{3.C_n^2}{A_3^1} + ... + \frac{(n+1).C_n^n}{A_{n+1}^1}$, biết rằng: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211$

ĐS: $n = 20$; $S = 2^{20}$.

Bài 65: (CĐ Sư phạm TPHCM khối BT 2006)

Khai triển biểu thức $(1-2x)^n$ ta được đa thức có dạng: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

Tìm hệ số của x^5, biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$.

ĐS: $n = 7; a_5 = -672$.

Bài 66: (CĐ Điện lực TPHCM 2006)

Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$, biết rằng: $C_n^1 + C_n^3 = 13n$ (*n* là số tự nhiên lớn hơn 2, *x* là số thực khác 0).

ĐS: $T_5 = 210$.

Bài 67: (CĐ Kinh tế TPHCM 2006)

Tìm $n \in N$ sao cho: $C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \ldots + C_{4n+2}^{2n} = 256$

ĐS: Ta có:

$$C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^1 + C_{4n+2}^2 + \ldots + C_{4n+2}^{4n+2} = 2^{4n+2}$$

$$C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \ldots + C_{4n+2}^{4n+2} = 2^{4n+1}$$

$$C_{4n+2}^0 + C_{4n+2}^2 + C_{4n+2}^4 + \ldots + C_{4n+2}^{2n} = 2^{4n}$$

Vậy có: $2^{4n} = 256 \Leftrightarrow n = 2$

Khi $n = 2$ *thì* $S_2 = C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 = 256$. *Vậy* $S_n = 256 \Leftrightarrow n = 2$.

Bài 68: (CĐ Kinh tế đối ngoại khối AD 2006)

Cho A = $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$. Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm bao nhiêu số hạng?

ĐS: $A = \sum_{k=0}^{20} (-1)^k C_{20}^k x^{20-k} \left(x^{-2}\right)^k + \sum_{n=0}^{10} (-1)^n C_{10}^n \left(x^3\right)^{10-k} \left(x^{-1}\right)^n$

$= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k C_{20}^k x^{20-3k} + \sum_{n=0}^{10} (-1)^n C_{10}^n x^{30-4n}$

Xét trường hợp $20 - 3k = 30 - 4n \Leftrightarrow 10 - n = 3(n - k)$

Vì $0 \le n \le 10$ *và* $10 - n$ *phải là bội số của 3 nên* $n = 4$ *hay* $n = 7$ *hay* $n = 10$

$\Rightarrow$ *có 3 số hạng trong hai khai triển trên có luỹ thừa của x giống nhau.*

Vậy sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm: $21 + 11 - 3 = 29$ *số hạng.*

Bài 69: (CĐ KT Y tế I 2006)

Tìm số tự nhiên *n* thoả mãn đẳng thức sau:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2k} 3^{2k} + \ldots + C_{2n}^{2n-2} 3^{2n-2} + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{15}(2^{16} + 1)$$

ĐS: Ta có: $4^{2n} = (1 + 3)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 3^1 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} 3^{2n-1} + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$

$2^{2n} = (1 - 3)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 3^1 + C_{2n}^2 3^2 - \ldots - C_{2n}^{2n-1} 3^{2n-1} + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$

$\Rightarrow 4^{2n} + 2^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}\right) \Rightarrow 4^{2n} + 2^{2n} = 2.2^{15}(2^{16} + 1)$

$\Rightarrow (2^{2n} - 2^{16})(2^{2n} + 2^{16} + 1) = 0 \Rightarrow 2^{2n} = 2^{16} \quad \Rightarrow n = 8$.

Bài 70: (CĐ Xây dựng số 2 2006)

Chứng minh: $C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + \ldots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$

HD: Lưu ý: $(3-1)^n = 2^n$ *và* $(1+1)^n = 2^n \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 71: (CĐ KT Y tế 1 2005)

Giải bất phương trình: $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 - 20 < 0$

ĐS: $x = 2$.

Bài 72: (CĐBC Hoa Sen khối D 2006)

Tìm hệ số của $x^{29}y^8$ trong khai triển của $(x^3 - xy)^{15}$.

ĐS: $C_{15}^8 = 6435$.

Bài 73: (CĐ Sư phạm TPHCM khối DM 2006)

Khai triển biểu thức $(1-2x)^n$ ta được đa thức có dạng: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

Tìm hệ số của x^5, biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$.

ĐS: $n = 7; a_5 = -672$.

Bài 74: (ĐH 2007A)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$.

HD: Tính $\int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2}dx$ *bằng 2 cách.*

Bài 75: (ĐH 2007B)

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết:

$$3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^nC_n^n = 2048$$

ĐS: $VT = (3-1)^n = 2^n \Rightarrow n = 11 \quad a_{10} = C_{11}^{10}.2 = 22$.

Bài 76: (ĐH 2007D)

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

ĐS: Hệ số của x^5 *trong khai triển của* $x(1-2x)^5$ *là:* $(-2)^4.C_5^4$.

Hệ số của x^5 *trong khai triển của* $x^2(1+3x)^{10}$ *là:* $3^3C_{10}^3$.

$\Rightarrow a_5 = (-2)^4.C_5^4 + 3^3C_{10}^3 = 3320$.

Bài 77: (ĐH 2008A)

Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, trong đó $n \in N^*$ và các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$ thoả mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$.

ĐS: Đặt $f(x) = (1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \Rightarrow a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^n \Rightarrow n = 12$.

Từ $\frac{a_k}{a_{k+1}} < 1 \Leftrightarrow k \le 7$ *và* $\frac{a_k}{a_{k+1}} > 1 \Leftrightarrow k > 7$ $\Rightarrow$ *Số lớn nhất là* $a_8 = 2^8C_{12}^8 = 126720$.

Bài 78: (ĐH 2008B)

Chứng minh rằng $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$.

ĐS: $VT = \frac{k!(n-k)!}{n!} = VP$.

Bài 79: (ĐH 2008D)

Tìm số nguyên dương *n* thoả mãn hệ thức $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048$.

ĐS: $VT = \frac{(1+1)^{2n} - (1-1)^{2n}}{2} = 2^{2n-1} \Rightarrow n = 6$.

Bài 80: (CĐ 2008)

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$ $(x > 0)$.

ĐS: $T_{16} = 6528$.

Bài 81: (ĐH 2012A)

Cho n là số nguyên dương thoả mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$, $(x \neq 0)$.

ĐS: $n = 7$; *Số hạng chứa* x^5 *là* $-\frac{35}{16}x^5$.

Bài 82:

ĐS:

